

Question de cours

2 points

1) Soit $z = x + iy$ la forme algébrique de z (x et y réels). Le **conjugué** de z est le nombre complexe

$$\bar{z} = x - iy$$

autrement dit, $\bar{z}$ a la même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée.

2) Soit $z = x + iy$ avec x, y réels. Alors $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$. Donc

$$z = \bar{z} \iff z - \bar{z} = 0 \iff 2iy = 0 \iff y = 0 \iff z = x \in \mathbb{R}.$$

$$z = \bar{z} \text{ si et seulement si } z \in \mathbb{R}$$

Exercice 1

5 points

1) Pour $z = x + iy$ (x, y réels), $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$.

$$z_1\bar{z}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \quad z_2\bar{z}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$z_3\bar{z}_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \quad \boxed{z_k\bar{z}_k = 1 \text{ pour } k = 1, 2, 3}$$

2) On factorise : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$. Donc

$$z_1z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + i)(\sqrt{3} - i) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - i^2) = \frac{\sqrt{2}}{4}((\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1))$$

$$\boxed{z_1z_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

3) $z_2z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i) \times \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 3i - i - i^2\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(2\sqrt{3} + 2i)$, donc

$$\boxed{z_2z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}$$

4) D'après la question 1), $z_1\bar{z}_1 = 1$, donc $\frac{1}{z_1} = \bar{z}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{z_2z_3}{z_1} &= z_2z_3 \times \bar{z}_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \times \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - i\sqrt{3} + i - i^2) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}((\sqrt{3} + 1) + i(1 - \sqrt{3})) \end{aligned}$$

$$\frac{z_2 z_3}{z_1} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Remarque : c'est le conjugué de $z_1 z_2$ trouvé à la question 2).

5) $z_3^2 = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4}(1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2) = \frac{1}{4}(-2 + 2i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Puis

$$z_3^3 = z_3^2 \times z_3 = \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{4}((i\sqrt{3})^2 - 1^2) = \frac{1}{4}(-3 - 1), \quad \boxed{z_3^3 = -1}$$

Exercice 2

4 points

1) L'équation ne contient pas $\bar{z}$: on regroupe les termes en z .

$$\begin{aligned} 2 - i + iz &= -3iz + 2z + \frac{2}{3} \iff iz + 3iz - 2z = \frac{2}{3} - 2 + i \\ \iff (-2 + 4i)z &= -\frac{4}{3} + i \\ \iff z &= \frac{-\frac{4}{3} + i}{-2 + 4i} = \frac{(-\frac{4}{3} + i)(-2 - 4i)}{(-2)^2 + 4^2} \\ \iff z &= \frac{\frac{8}{3} + \frac{16}{3}i - 2i + 4}{20} = \frac{\frac{20}{3} + \frac{10}{3}i}{20} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}i \right\}$$

Vérification : $2 - i + i\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}i\right) = \frac{11}{6} - \frac{2}{3}i$ et $(2 - 3i)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}i\right) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i + \frac{2}{3} = \frac{11}{6} - \frac{2}{3}i$.

2) L'inconnue n'apparaît que sous la forme $\bar{z}$: on résout d'abord en $\bar{z}$.

$$\begin{aligned} 4\bar{z} + i\bar{z} - 3 &= 2i\bar{z} + 1 \iff (4 + i - 2i)\bar{z} = 4 \\ \iff \bar{z} &= \frac{4}{4 - i} = \frac{4(4 + i)}{4^2 + 1^2} = \frac{16}{17} + \frac{4}{17}i \\ \iff z &= \frac{16}{17} - \frac{4}{17}i \quad (\text{en passant au conjugué}) \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{16}{17} - \frac{4}{17}i \right\}$$

Vérification : $(4 - i)\left(\frac{16}{17} + \frac{4}{17}i\right) = \frac{64 + 16i - 16i + 4}{17} = \frac{68}{17} = 4$.

3) L'équation contient z et $\bar{z}$: on pose $z = x + iy$ avec x, y réels, donc $\bar{z} = x - iy$.

Membre de gauche : $i\bar{z} + 3iz = ix + y + 3ix - 3y = -2y + 4xi$.

Membre de droite : $i - 1 + \bar{z} - z = i - 1 - 2iy = -1 + (1 - 2y)i$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\begin{cases} -2y = -1 \\ 4x = 1 - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}i \right\}$$

Vérification : pour $z = \frac{1}{2}i$, $\bar{z} = -\frac{1}{2}i$; $i\bar{z} + 3iz = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ et $i - 1 - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i = -1$.

Exercice 3

3 points

- 1) $z^2 - 3z + 1 = 2z - 2 \iff z^2 - 5z + 3 = 0$. Discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 25 - 12 = 13 > 0$.
L'équation admet deux solutions **réelles** :

$$z_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{13}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

Parties réelles : $\text{Re}(z_1) = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ et $\text{Re}(z_2) = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$; parties imaginaires : $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) = 0$ (ce sont des réels).

- 2) $-3z^2 + z - \frac{17}{3} = 1 \iff -3z^2 + z - \frac{20}{3} = 0 \iff 9z^2 - 3z + 20 = 0$ (en multipliant par $-3 \neq 0$).
Discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 9 \times 20 = 9 - 720 = -711 < 0$, et $-711 = (i\sqrt{711})^2 = (3i\sqrt{79})^2$
car $711 = 9 \times 79$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{3 - 3i\sqrt{79}}{18} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{79}}{6}i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + 3i\sqrt{79}}{18} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{79}}{6}i$$

$$S = \left\{ \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{79}}{6}i; \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{79}}{6}i \right\}$$

Parties réelles : $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) = \frac{1}{6}$; parties imaginaires : $\text{Im}(z_1) = -\frac{\sqrt{79}}{6}$ et $\text{Im}(z_2) = \frac{\sqrt{79}}{6}$.

Vérification : somme $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ et produit $\frac{1}{36} + \frac{79}{36} = \frac{80}{36} = \frac{20}{9}$, comme attendu pour $9z^2 - 3z + 20$.

Exercice 4

6 points + bonus

- 1) Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, celui d'un produit (donc d'une puissance) est le produit des conjugués, et un réel est égal à son conjugué. Les coefficients de P étant **réels** :

$$\overline{P(z_0)} = \overline{z_0^4 - 3z_0^3 + 5z_0^2 - 4z_0 + 2} = \bar{z}_0^4 - 3\bar{z}_0^3 + 5\bar{z}_0^2 - 4\bar{z}_0 + 2 = P(\bar{z}_0).$$

Comme $P(z_0) = 0$, on obtient $P(\bar{z}_0) = \bar{0} = 0$: $P(\bar{z}_0) = 0$

2) $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Donc

$$(1+i)^3 = 2i(1+i) = 2i + 2i^2, \quad \boxed{(1+i)^3 = -2 + 2i}$$

$$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2, \quad \boxed{(1+i)^4 = -4}$$

3) On remplace z par $1+i$ en utilisant $(1+i)^2 = 2i$ et les résultats de la question 2) :

$$\begin{aligned} P(1+i) &= (1+i)^4 - 3(1+i)^3 + 5(1+i)^2 - 4(1+i) + 2 \\ &= -4 - 3(-2 + 2i) + 5 \times 2i - 4 - 4i + 2 \\ &= (-4 + 6 - 4 + 2) + (-6 + 10 - 4)i \end{aligned} \quad \boxed{P(1+i) = 0}$$

4) $P(1+i) = 0$ et $\overline{1+i} = 1-i$: d'après la question 1) appliquée à $z_0 = 1+i$, $\boxed{P(1-i) = 0}$

5) $1+i$ est une racine de P , donc P se factorise par $z - (1+i)$: il existe un polynôme R de degré 3 tel que $P(z) = (z - (1+i))R(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En $z = 1-i$: $0 = P(1-i) = (1-i - 1-i)R(1-i) = -2iR(1-i)$, et $-2i \neq 0$, donc $R(1-i) = 0$. R se factorise donc par $z - (1-i)$: il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $R(z) = (z - (1-i))Q(z)$. Ainsi

$$P(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))Q(z).$$

Or $(z - 1 - i)(z - 1 + i) = (z - 1)^2 - i^2 = z^2 - 2z + 1 + 1 = z^2 - 2z + 2$. Donc

$$\boxed{P(z) = Q(z)(z^2 - 2z + 2) \text{ avec } Q \text{ de degré 2}}$$

6) On développe :

$$\begin{aligned} (z^2 - z + 1)(z^2 - 2z + 2) &= z^4 - 2z^3 + 2z^2 - z^3 + 2z^2 - 2z + z^2 - 2z + 2 \\ &= z^4 - 3z^3 + 5z^2 - 4z + 2 = P(z). \end{aligned}$$

Comme $z^2 - 2z + 2$ n'est pas le polynôme nul, le quotient Q est unique (division euclidienne), donc $\boxed{Q(z) = z^2 - z + 1}$

Autre méthode : on pose $Q(z) = az^2 + bz + c$, on développe $Q(z)(z^2 - 2z + 2)$ et on identifie avec P : $a = 1$, $b - 2a = -3$ donc $b = -1$, $2c = 2$ donc $c = 1$ (et l'on vérifie $2a - 2b + c = 5$, $2b - 2c = -4$).

7) On résout $z^2 - z + 1 = 0$: $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2 < 0$, d'où deux racines conjuguées

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

donc $z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Avec la question 5) :

$$\boxed{P(z) = (z - 1 - i)(z - 1 + i)\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

8) **BONUS.** Notons $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. D'après la question 7) et puisque $a_4 = 1$,

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Développement. En développant ce produit de quatre facteurs, chaque terme s'obtient en choisissant dans chaque facteur soit z , soit $-z_k$. Si l'on choisit $-z_k$ dans exactement j facteurs, d'indices $k_1 < k_2 < \dots < k_j$ (indices distincts, car chaque facteur n'est utilisé qu'une fois), et z dans les $4 - j$ autres, on obtient le terme $(-1)^j z_{k_1} \dots z_{k_j} z^{4-j}$. En regroupant selon j :

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 - \sigma_1 z^3 + \sigma_2 z^2 - \sigma_3 z + \sigma_4,$$

avec, en abrégant $\sigma_j = \sigma_j(z_1, z_2, z_3, z_4)$:

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4, \quad \sigma_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4,$$

$$\sigma_3 = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4, \quad \sigma_4 = z_1 z_2 z_3 z_4.$$

Identification. Deux polynômes égaux pour tout $z \in \mathbb{C}$ ont les mêmes coefficients. Le coefficient de z^{4-j} vaut $(-1)^j \sigma_j$ d'un côté et a_{4-j} de l'autre, donc $(-1)^j \sigma_j = a_{4-j}$, c'est-à-dire, en multipliant par $(-1)^j$:

$$\sigma_j(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-1)^j a_{4-j} \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, 4$$

soit $\sigma_1 = -a_3 = 3$, $\sigma_2 = a_2 = 5$, $\sigma_3 = -a_1 = 4$, $\sigma_4 = a_0 = 2$.

Vérification avec les racines : $z_1 z_2 = (1 + i)(1 - i) = 2$, $z_1 + z_2 = 2$, $z_3 z_4 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, $z_3 + z_4 = 1$.
 $\sigma_1 = 2 + 1 = 3$; $\sigma_2 = z_1 z_2 + z_3 z_4 + (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) = 2 + 1 + 2 = 5$; $\sigma_3 = z_1 z_2(z_3 + z_4) + z_3 z_4(z_1 + z_2) = 2 + 2 = 4$; $\sigma_4 = 2 \times 1 = 2$.