

Calculatrice interdite. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Question de cours

2 points

- 1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner la définition du conjugué $\bar{z}$ de z .
- 2) Montrer que $z = \bar{z}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

5 points

On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad ; \quad z_3 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- 1) Montrer que $z_k \bar{z}_k = 1$ pour $k = 1, 2, 3$.
- 2) Déterminer la forme algébrique de $z_1 z_2$.
- 3) Montrer que $z_2 z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.
- 4) Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_2 z_3}{z_1}$.
- 5) Montrer que $z_3^3 = -1$.

Exercice 2

4 points

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

- 1) $2 - i + iz = -3iz + 2z + \frac{2}{3}$
- 2) $4\bar{z} + i\bar{z} - 3 = 2i\bar{z} + 1$
- 3) $i\bar{z} + 3iz = i - 1 + \bar{z} - z$

Exercice 3

3 points

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes. On précisera pour chaque solution la partie réelle et la partie imaginaire.

- 1) $z^2 - 3z + 1 = 2z - 2$
- 2) $-3z^2 + z - \frac{17}{3} = 1$

Exercice 4

6 points + bonus

On considère le polynôme défini pour $z \in \mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 - 3z^3 + 5z^2 - 4z + 2$.

- 1) On suppose que $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $P(z_0) = 0$. Montrer que $\overline{z_0}$ vérifie $P(\overline{z_0}) = 0$.
- 2) Montrer que $(1 + i)^3 = -2 + 2i$ et que $(1 + i)^4 = -4$.
- 3) En déduire la valeur de $P(1 + i)$.
- 4) En déduire sans calculs supplémentaires que $P(1 - i) = 0$.
- 5) Démontrer qu'il existe un polynôme Q de degré 2 tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$P(z) = Q(z)(z^2 - 2z + 2)$$

- 6) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $Q(z) = z^2 - z + 1$.
- 7) En déduire une factorisation de P en produit de polynômes de degré 1.
- 8) **BONUS.** Pour $j \in \{1, \dots, 4\}$ et z_1, z_2, z_3, z_4 des nombres complexes, on définit :

$$\sigma_j(z_1, z_2, z_3, z_4) := \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_j \leq 4} z_{k_1} z_{k_2} \dots z_{k_j}$$

On note z_1, z_2, z_3, z_4 les racines du polynôme P obtenues précédemment et $a_0, \dots, a_4$ ses coefficients (avec la notation vue en cours), c'est-à-dire $a_4 = 1, a_3 = -3, a_2 = 5, a_1 = -4, a_0 = 2$. Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, 4\}$, on a

$$\sigma_j(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-1)^j a_{4-j}$$