

Exercice 1 : Un triangle qui se construit ligne à ligne

4 points

- 1) Dans le triangle de Pascal, chaque nombre intérieur d'une ligne est la somme des deux nombres voisins situés juste au-dessus. Le nombre de rang $k+1$ de la nouvelle ligne M est donc la somme des nombres de rang k et $k+1$ de L :

```
M.append(L[k] + L[k + 1])
```

Contrôle : avec $L = [1, 2, 1]$, la boucle ajoute $1 + 2 = 3$ puis $2 + 1 = 3$, et la fonction renvoie $[1, 3, 3, 1]$, qui est bien la ligne suivante.

- 2) La ligne affichée après le nombre 6 est la ligne $n = 6$ du triangle; son élément de rang k est $\binom{6}{k}$, le premier étant de rang 0. L'élément de rang 2 est le troisième nombre de la liste :

$$\binom{6}{2} = 15.$$

Dans un arbre représentant la répétition de 6 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, 15 est le **nombre de chemins** qui comportent exactement 2 succès, c'est-à-dire le nombre de chemins réalisant l'événement $\{X = 2\}$.

- 3) On lit aussi $\binom{6}{3} = 20$ (élément de rang 3). Chaque chemin à k succès a la probabilité $0,2^k \times 0,8^{6-k}$, donc :

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \times 0,2^2 \times 0,8^4 = 15 \times 0,04 \times 0,4096 = 0,24576 \approx 0,246,$$

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} \times 0,2^3 \times 0,8^3 = 20 \times 0,008 \times 0,512 = 0,08192 \approx 0,082.$$

Exercice 2 : Les vannes motorisées d'un réseau de chaleur

11 points

- 1) Pour chacune des 10 vannes, on observe une épreuve à deux issues : « grippée » (succès), de probabilité 0,08, ou « non grippée ». Les 10 épreuves sont identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,08)$.

2) $P(X = 0) = 0,92^{10} \approx 0,434$.

- 3) $\{X = 1\}$ est réalisé par $\binom{10}{1} = 10$ chemins, chacun de probabilité $0,08 \times 0,92^9$:

$$P(X = 1) = 10 \times 0,08 \times 0,92^9 \approx 0,378.$$

$\{X \leq 1\}$ est la réunion des événements disjoints $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,43439 + 0,37773 \approx 0,812.$$

Dans environ 81 % des visites, on trouve au plus une vanne grippée.

- 4) a. Par la formule de Pascal, un coefficient de la ligne 10 est la somme de deux coefficients voisins de la ligne 9 :

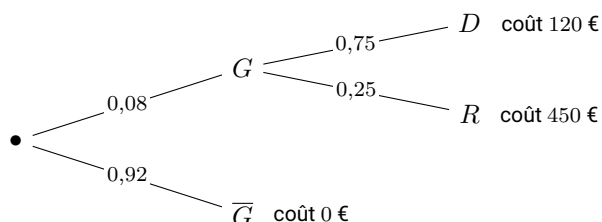
$$\binom{10}{2} = \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 9 + 36 = \boxed{45}.$$

b. $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,08^2 \times 0,92^8 = 45 \times 0,0064 \times 0,92^8 \approx \boxed{0,148}.$

- 5) $E(X) = np = 10 \times 0,08 = \boxed{0,8}.$

Sur un grand nombre de visites annuelles, on trouve en moyenne 0,8 vanne grippée par visite.

- 6) a. On note G : « la vanne est grippée », D : « elle est débloquée sur place » et R : « elle est remplacée ».



$P(C = 120) = P(G \cap D) = 0,08 \times 0,75 = 0,06$ et $P(C = 450) = P(G \cap R) = 0,08 \times 0,25 = 0,02$, d'où la loi de C :

c	0	120	450
$P(C = c)$	0,92	0,06	0,02

Contrôle : $0,92 + 0,06 + 0,02 = 1.$

b. $E(C) = 0 \times 0,92 + 120 \times 0,06 + 450 \times 0,02 = 7,2 + 9 = \boxed{16,2 \text{ €}}.$

Sur un grand nombre de vannes et de visites, l'intervention coûte en moyenne 16,20 € par vanne et par visite. Le remplacement, pourtant trois fois plus rare que le déblocage, pèse plus lourd dans ce coût moyen (9 € contre 7,20 €).

- 7) a. Chaque vanne est remplacée avec la probabilité $P(G \cap R) = 0,02$ (question 6a), indépendamment des autres, et Y compte les vannes remplacées parmi les 10 :

Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,02).$

L'événement « au moins une vanne remplacée » est le contraire de $\{Y = 0\}$:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,98^{10} \approx \boxed{0,183}.$$

Or « une chance sur cinq » correspond à 0,2, et $0,183 < 0,2$. Le responsable a tort, de peu : la probabilité est un peu inférieure à une chance sur cinq.

b. Le planning suffit lorsqu'il y a au plus un remplacement, c'est-à-dire lorsque $\{Y \leq 1\}$ est réalisé. C'est la réunion des événements disjoints $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$; $\{Y = 1\}$ est réalisé par

$\binom{10}{1} = 10$ chemins, chacun de probabilité $0,02 \times 0,98^9$:

$$P(Y \leq 1) = 0,98^{10} + 10 \times 0,02 \times 0,98^9 \approx 0,81707 + 0,16675 \approx \boxed{0,984}.$$

Comme $0,984 \geq 0,98$, **le planning est jugé suffisant** : un seul remplacement suffit dans environ 98,4 % des visites.

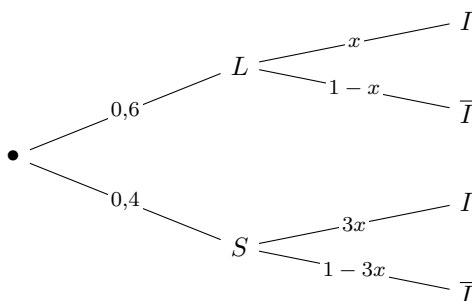
Comparaison : à la question 3, $P(X \leq 1) \approx 0,812$ seulement. Les deux variables comptent des vannes parmi les mêmes 10, mais avec des probabilités très différentes : une vanne est grippée avec la probabilité 0,08, alors qu'elle n'est remplacée qu'avec la probabilité 0,02, puisque trois vannes grippées sur quatre sont débloquées sur place. Les remplacements sont donc quatre fois plus rares que les grippages ($E(Y) = 10 \times 0,02 = 0,2$ contre $E(X) = 0,8$), et il est bien plus probable d'en avoir au plus un.

Exercice 3 : Lampadaires à LED ou au sodium

5 points

Modélisation. On choisit un lampadaire au hasard et on note L : « il est équipé de LED », S : « il est équipé d'une lampe au sodium » et I : « il a nécessité au moins une intervention ». L'énoncé donne $P(L) = 0,6$, $P(S) = 0,4$ et $P(I) = 0,054$.

La probabilité d'intervention n'est pas donnée pour chaque type de lampe : on pose $x = P_L(I)$. « Trois fois plus de chances » se traduit par $P_S(I) = 3x$.



Détermination de x . L et S forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(I) = P(L) \times P_L(I) + P(S) \times P_S(I) = 0,6x + 0,4 \times 3x = 1,8x.$$

Comme $P(I) = 0,054$: $1,8x = 0,054$, donc $x = \frac{0,054}{1,8} = 0,03$. Ainsi $P_L(I) = 0,03$ et $P_S(I) = 0,09$.

Réponse à la question. On cherche $P_I(S)$:

$$P(S \cap I) = 0,4 \times 0,09 = 0,036 \quad \text{puis} \quad P_I(S) = \frac{P(S \cap I)}{P(I)} = \frac{0,036}{0,054} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 66,7\%}.$$

Contrôle : $P(L \cap I) = 0,6 \times 0,03 = 0,018$ et $0,018 + 0,036 = 0,054$.

Interprétation : les lampadaires au sodium ne représentent que 40 % du parc, mais deux interventions sur trois les concernent.