

Exercice 1 : Un QCM à justifier

6 points

- 1) **Réponse c.** On a $P_A(B) = 0,5 = P(B)$: par définition, B est indépendant de A . Comme A et B sont de probabilités non nulles, l'indépendance est symétrique, donc A est indépendant de B : $P_B(A) = P(A) = \boxed{0,4}$.

Vérification par le calcul : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$, puis $P_B(A) = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$.

Pourquoi les autres sont fausses : $P(A \cap B) = 0,2$, ni $0,9$ (ce serait $P(A) + P(B)$), et une probabilité d'intersection ne peut pas dépasser $P(A)$, ni 0 (les événements ne sont pas incompatibles); et $P_B(A) \neq 0,5$.

- 2) **Réponse b.** Pour une loi binomiale, $E(X) = np$, donc $n \times 0,15 = 1,2$ et $n = \frac{1,2}{0,15} = \boxed{8}$.

Contrôle : $8 \times 0,15 = 1,2$.

- 3) **Réponse d.** L'événement $\{Y = 5\}$ correspond aux chemins comportant cinq succès et un échec. L'échec peut se produire à l'une quelconque des six épreuves : il y a $\binom{6}{5} = 6$ tels chemins, chacun de probabilité $0,9^5 \times 0,1$. D'où

$$P(Y = 5) = \boxed{6 \times 0,9^5 \times 0,1} \approx 0,354.$$

Pourquoi les autres sont fausses : **a** est la probabilité d'un seul de ces six chemins; **b** est $P(Y = 6)$; **c** est $P(Y \leq 5)$.

- 4) **Réponse a.** Les 8 prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise : ce sont 8 épreuves identiques et indépendantes à deux issues, « conforme » (probabilité $0,97$) ou non. Le nombre de pièces conformes suit donc la loi binomiale $\boxed{\mathcal{B}(8; 0,97)}$.

Pourquoi les autres ne conviennent pas :

- **b** : les tirages sont *sans remise* dans un petit lot; la probabilité de tirer un composant défectueux change d'un tirage à l'autre ($\frac{2}{10}$ au premier, puis $\frac{1}{9}$ ou $\frac{2}{9}$) : les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes;
- **c** : le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance, on compte des essais et non des succès parmi n épreuves;
- **d** : la probabilité de panne varie d'un jour à l'autre, les épreuves ne sont pas identiques.

Exercice 2 : La télérelève d'un compteur d'eau

10 points

Partie A – Quatre envois par temps sec

- 1) Chaque envoi est une épreuve à deux issues : « reçu » (succès), de probabilité 0,7, ou « non reçu ». Les 4 envois sont identiques et indépendants, et X compte le nombre de succès : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,7)$.

- 2) Le relevé est perdu lorsque $X = 0$; un seul chemin réalise cet événement :

$$P(X = 0) = 0,3^4 = \boxed{0,0081}.$$

- 3) La ligne $n = 4$ du triangle de Pascal est 1 4 6 4 1, donc $\binom{4}{2} = 6$: il y a $\boxed{6}$ façons de recevoir exactement deux envois sur quatre ($RRNN, RNRN, RNNR, NRRN, NRNR, NNRR$, en notant R un envoi reçu et N un envoi perdu). Chacune a pour probabilité $0,7^2 \times 0,3^2 = 0,49 \times 0,09 = 0,0441$:

$$P(X = 2) = 6 \times 0,0441 = \boxed{0,2646}.$$

- 4) L'index est validé lorsque $X \geq 2$, événement contraire de $\{X = 0\} \cup \{X = 1\}$. Or

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0,7 \times 0,3^3 = 4 \times 0,7 \times 0,027 = 0,0756,$$

d'où

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,0081 - 0,0756 = \boxed{0,9163}.$$

- 5) $E(X) = np = 4 \times 0,7 = \boxed{2,8}$.

Sur un grand nombre de jours secs, le concentrateur reçoit en moyenne 2,8 des 4 envois quotidiens.

Partie B – Combien d'envois par jour ?

- 6) Avec n envois par temps sec, le nombre d'envois reçus suit la loi $\mathcal{B}(n; 0,7)$; le relevé est perdu si aucun n'est reçu, avec la probabilité $\boxed{0,3^n}$. On résout, pour n entier naturel non nul :

$$0,3^n \leq 10^{-4} \iff \ln(0,3^n) \leq \ln(10^{-4}) \quad (\text{la fonction } \ln \text{ est strictement croissante})$$

$$\iff n \ln(0,3) \leq \ln(10^{-4})$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,3)} \quad (\text{on divise par } \ln(0,3) < 0 : \text{ le sens change})$$

Or $\frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,3)} \approx 7,65$. Le plus petit entier qui convient est $\boxed{n = 8}$.

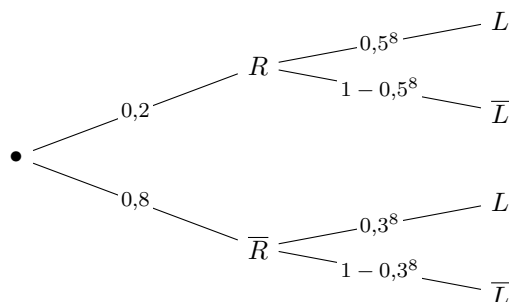
Contrôle : $0,3^7 \approx 2,19 \times 10^{-4} > 10^{-4}$ et $0,3^8 \approx 6,56 \times 10^{-5} \leq 10^{-4}$.

- 7) En 10 ans, le compteur fait $10 \times 365 \times n = 3\,650n$ envois. La pile tient 10 ans si

$$3\,650n \leq 30\,000 \iff n \leq \frac{30\,000}{3\,650} \approx 8,22.$$

Comme n est entier, $\boxed{n \leq 8}$. Par temps sec, $n = 8$ satisfait donc à la fois l'exigence de perte et celle de durée de vie.

- 8) Pour $n = 8$: un jour de pluie, $P_R(L) = 0,5^8 = 0,00390625$; un jour sec, $P_{\bar{R}}(L) = 0,3^8 = 0,00006561$.



R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(L) = 0,2 \times 0,5^8 + 0,8 \times 0,3^8 = 0,00078125 + 0,000052488 = 0,000833738 \approx \boxed{0,000834}.$$

- 9) On cherche $P_L(R)$:

$$P_L(R) = \frac{P(R \cap L)}{P(L)} = \frac{0,00078125}{0,000833738} \approx \boxed{0,94}.$$

Alors qu'il ne pleut qu'un jour sur cinq, environ 94 % des relevés perdus le sont un jour de pluie.

- 10) **Non.** La pile impose $n \leq 8$ (question 7). Or, pour tout n ,

$$P(L) \geq P(R \cap L) = 0,2 \times 0,5^n,$$

et, pour $n \leq 8$, $0,5^n \geq 0,5^8$, donc $P(L) \geq 0,2 \times 0,5^8 = 0,00078125 > 10^{-4}$.

Les jours de pluie suffisent donc à dépasser le seuil, quel que soit le nombre d'envois permis par la pile. *Pour aller plus loin* : la seule contribution des jours de pluie impose $0,2 \times 0,5^n \leq 10^{-4}$,

c'est-à-dire $n \geq \frac{\ln(5 \times 10^{-4})}{\ln(0,5)} \approx 10,97$, soit au moins 11 envois par jour (et l'on vérifie que $n = 11$

donne $P(L) \approx 9,9 \times 10^{-5}$). Les deux exigences sont incompatibles : il faudrait une pile plus grosse ou une meilleure réception radio.

Exercice 3 : Les ventilateurs d'une centrale de traitement d'air

4 points

Les réponses 1 et 4 de l'élève sont correctes; les réponses 2 et 3 sont fausses.

- 1) Le produit $0,2^2 \times 0,8^3$ est la probabilité d'un **seul** chemin de l'arbre, par exemple celui où les ventilateurs 1 et 2 sont remplacés et les trois autres non. Mais l'événement $\{X = 2\}$ est réalisé par tous les chemins comportant exactement deux remplacements : il y en a $\binom{5}{2} = 10$ (ligne $n = 5$ du triangle de Pascal : 1 5 10 10 5 1), tous de même probabilité. L'élève a oublié

ce coefficient :

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,2^2 \times 0,8^3 = 10 \times 0,02048 = \boxed{0,2048}.$$

- 2) *Sans calcul* : le raisonnement « $5 \times 0,2$ » appliqué à une probabilité 0,3 donnerait $5 \times 0,3 = 1,5$, ce qui n'est pas une probabilité. De plus, il est possible qu'aucun ventilateur ne soit à remplacer (ce chemin a une probabilité non nulle), donc l'événement « au moins un ventilateur à remplacer » ne peut pas être certain. L'erreur vient de ce que les événements « le ventilateur i est à remplacer » ne sont pas incompatibles : on ne peut pas additionner leurs probabilités.

Calcul correct : on passe par l'événement contraire $\{X = 0\}$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,8^5 = 1 - 0,32768 = 0,67232 \approx \boxed{0,672}.$$

- 3) La probabilité $P(X \geq 1) \approx 0,672$ mesure la chance qu'un événement se produise lors d'une révision : elle est toujours comprise entre 0 et 1. L'espérance $E(X) = 1$ est une *moyenne* du nombre de ventilateurs remplacés, sur un grand nombre de révisions : certaines révisions n'en demandent aucun (environ une sur trois, puisque $P(X = 0) \approx 0,328$), d'autres en demandent deux ou plus. Le nombre 1 de la réponse 4 est donc correct, mais il ne dit pas qu'un remplacement est certain : la conclusion « prévoir au moins un ventilateur de rechange » est raisonnable, sa justification par la réponse 3 ne l'est pas.