

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Un QCM à justifier

6 points

Pour chacune des quatre questions, une seule des propositions est exacte. Indiquer la lettre de la réponse exacte, **en expliquant votre choix**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Chaque question vaut 1,5 point.

- 1) A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P_A(B) = 0,5$. Alors :
 a. $P(A \cap B) = 0,9$ b. $P(A \cap B) = 0$ c. $P_B(A) = 0,4$ d. $P_B(A) = 0,5$
- 2) Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et $0,15$, et son espérance vaut $1,2$. Alors n est égal à :
 a. 6 b. 8 c. 12 d. 18
- 3) Une variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,9$. La probabilité $P(Y = 5)$ est égale à :
 a. $0,9^5 \times 0,1$ b. $0,9^6$ c. $1 - 0,9^6$ d. $6 \times 0,9^5 \times 0,1$
- 4) Parmi les variables aléatoires suivantes, laquelle suit une loi binomiale ?
 a. Le nombre de pièces conformes parmi 8 pièces prélevées au hasard dans une très grande production qui compte 3 % de pièces non conformes (les prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise).
 b. Le nombre de composants défectueux obtenus en tirant successivement, sans remise, 3 composants dans un lot de 10 composants dont 2 sont défectueux.
 c. Le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le premier démarrage réussi d'un moteur thermique par grand froid.
 d. Le nombre de jours de panne d'une machine sur une semaine de 5 jours, sachant que sa probabilité de tomber en panne augmente chaque jour avec l'usure.

Exercice 2 : La télérelève d'un compteur d'eau

10 points

Un compteur d'eau communicant transmet chaque jour son index à un concentrateur, par radio. Pour fiabiliser la transmission, il envoie plusieurs fois le même message dans la journée. Par temps sec, chaque envoi parvient au concentrateur avec la probabilité $0,7$, indépendamment des autres envois. On dit que le **relevé du jour est perdu** si aucun des envois de la journée ne parvient au concentrateur.

Partie A – Quatre envois par temps sec

4 points

Dans cette partie, on se place un jour de temps sec, et le compteur envoie 4 fois son message. On note X le nombre d'envois reçus par le concentrateur.

- 1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2) Calculer la valeur exacte de la probabilité que le relevé du jour soit perdu.
- 3) Déterminer, à l'aide d'un arbre ou du triangle de Pascal, le nombre de façons de recevoir exactement deux envois sur quatre, puis calculer la valeur exacte de $P(X = 2)$.
- 4) Pour écarter un message altéré pendant la transmission, le concentrateur ne valide l'index que s'il l'a reçu au moins deux fois.
Justifier que la probabilité que l'index du jour soit validé est égale à $0,9163$.
- 5) Calculer l'espérance de X et l'interpréter.

Partie B – Combien d’envois par jour ?

6 points

Le compteur envoie désormais son message n fois par jour, où n est un entier naturel non nul.

- 6) Par temps sec, exprimer en fonction de n la probabilité que le relevé du jour soit perdu. En résolvant une inéquation à l’aide de la fonction logarithme népérien, déterminer le plus petit entier n pour lequel cette probabilité est inférieure ou égale à 10^{-4} .
- 7) La pile du compteur permet 30 000 envois au total, et le distributeur d’eau exige qu’elle dure au moins 10 ans. On compte 365 jours par an.
Montrer que ces deux exigences imposent $n \leq 8$.

Dans la suite, on fixe $n = 8$. En réalité, il pleut 20 % des jours, et un jour de pluie chaque envoi parvient au concentrateur avec la probabilité 0,5 seulement, toujours indépendamment des autres envois. On choisit un jour au hasard et on note R : « il pleut ce jour-là » et L : « le relevé du jour est perdu ».

- 8) Construire un arbre pondéré décrivant la situation, puis calculer $P(L)$. Arrondir à 10^{-6} .
- 9) Un relevé a été perdu. Quelle est la probabilité qu’il ait plu ce jour-là ? Arrondir à 10^{-2} .
- 10) Le distributeur veut une probabilité de perte d’au plus 10^{-4} sur l’ensemble de l’année, jours de pluie compris, sans renoncer à la durée de vie de la pile.
Existe-t-il un nombre d’envois n qui satisfasse ces deux exigences ? Justifier.

Exercice 3 : Les ventilateurs d’une centrale de traitement d’air

4 points

La centrale de traitement d’air d’un lycée comporte cinq ventilateurs identiques. Lors de la révision semestrielle, chacun d’eux doit être remplacé avec la probabilité 0,2, indépendamment des autres. On note X le nombre de ventilateurs à remplacer lors d’une révision. Voici la copie d’un élève.

1. Les cinq ventilateurs sont indépendants et ont la même probabilité 0,2 d’être remplacés, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 0,2)$.
2. $P(X = 2) = 0,2^2 \times 0,8^3 = 0,02048$.
3. La probabilité qu’au moins un ventilateur soit à remplacer vaut $5 \times 0,2 = 1$: c’est certain. Il faut donc prévoir au moins un ventilateur de rechange à chaque révision.
4. $E(X) = 5 \times 0,2 = 1$: en moyenne, un ventilateur est remplacé à chaque révision.

- 1) Expliquer l’erreur commise à la réponse 2, en s’appuyant sur les chemins d’un arbre, et donner la valeur exacte de $P(X = 2)$.
- 2) Sans aucun calcul, expliquer pourquoi le raisonnement de la réponse 3 ne peut pas être correct. Calculer ensuite la probabilité qu’au moins un ventilateur soit à remplacer. Arrondir à 10^{-3} .
- 3) Les réponses 3 et 4 aboutissent au même nombre 1. Expliquer ce qui distingue une probabilité d’une espérance dans cette situation.