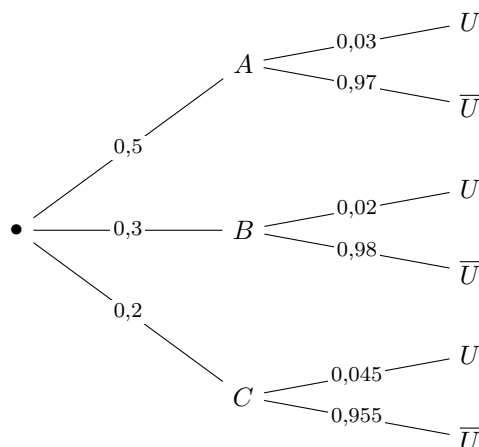


Exercice 1 : Les roulements d'un parc éolien

7 points

- 1) Le premier niveau de l'arbre porte la provenance (partition A, B, C), le second l'usure. Les pondérations du second niveau sont des probabilités *conditionnelles* : par exemple $P_A(U) = 0,03$.



Les probabilités issues d'un même nœud ont pour somme 1 : $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$ et, par exemple, $1 - 0,045 = 0,955$.

- 2) On multiplie les probabilités le long du chemin $A \rightarrow U$:

$$P(A \cap U) = P(A) \times P_A(U) = 0,5 \times 0,03 = \boxed{0,015}.$$

Interprétation : 1,5 % des roulements du parc proviennent du fabricant A et sont remplacés pour usure prématurée au cours de leurs cinq premières années.

- 3) A, B et C forment une partition de l'univers (un roulement vient d'un et d'un seul fabricant). D'après la formule des probabilités totales :

$$P(U) = P(A \cap U) + P(B \cap U) + P(C \cap U) = 0,5 \times 0,03 + 0,3 \times 0,02 + 0,2 \times 0,045$$

$$P(U) = 0,015 + 0,006 + 0,009 = \boxed{0,03}.$$

- 4) On cherche la probabilité de C sachant U :

$$P_U(C) = \frac{P(C \cap U)}{P(U)} = \frac{0,009}{0,03} = \boxed{0,3}.$$

Parmi les roulements remplacés pour usure, 30 % viennent du fabricant C , alors que ce fabricant ne fournit que 20 % du parc.

- 5) a. D'après la définition du cours, U est indépendant de A si $P_A(U) = P(U)$. Ici $P_A(U) = 0,03$ et $P(U) = 0,03$: les deux sont égales, donc $\boxed{U \text{ est indépendant de } A}$.

Vérification de la symétrie : $P_U(A) = \frac{P(A \cap U)}{P(U)} = \frac{0,015}{0,03} = 0,5 = P(A)$: A est aussi indépendant de U , comme l'annonce le cours.

- b. $P_B(U) = 0,02$ et $P(U) = 0,03$: $P_B(U) \neq P(U)$, donc $\boxed{U \text{ n'est pas indépendant de } B}$.

Interprétation : savoir qu'un roulement vient de A ne change rien au risque d'usure prématurée (3 %, comme sur l'ensemble du parc); savoir qu'il vient de B abaisse ce risque à 2 %. Pour l'exploitant, les roulements de B sont plus fiables que la moyenne du parc, ceux de C (4,5 %) le sont moins.

Exercice 2 : Des chemins dans un arbre

6 points

- 1) a. L'événement $\{X = 2\}$ est réalisé par les chemins comportant exactement deux succès :

$$S S E, \quad S E S, \quad E S S,$$

soit 3 chemins.

b. Chacun de ces chemins comporte deux branches de probabilité 0,4 et une branche de probabilité 0,6; sa probabilité est donc $0,4^2 \times 0,6 = 0,16 \times 0,6 = 0,096$. Les trois chemins ont la même probabilité, d'où

$$P(X = 2) = 3 \times 0,096 = \boxed{0,288}.$$

- 2) Un seul chemin réalise $\{X = 0\}$ ($E E E$) et un seul réalise $\{X = 3\}$ ($S S S$) :

$$P(X = 0) = 0,6^3 = \boxed{0,216} \quad \text{et} \quad P(X = 3) = 0,4^3 = \boxed{0,064}.$$

Contrôle : $P(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,6^2 = 0,432$ et $0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1$.

- 3) Chaque coefficient est la somme du coefficient situé juste au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche (formule de Pascal).

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Le nombre 3 de la question 1) a. est à la ligne $n = 3$, colonne $k = 2$: c'est le coefficient binomial $\binom{3}{2}$, nombre de chemins réalisant deux succès dans un arbre à trois épreuves.

- 4) Chaque chemin de l'arbre (image mentale à six niveaux) réalisant $\{Y = k\}$ a pour probabilité $0,5^k \times 0,5^{6-k} = 0,5^6 = \frac{1}{64}$, et il y a $\binom{6}{k}$ tels chemins. Avec la ligne $n = 6$ du triangle :

$$P(Y = 3) = \binom{6}{3} \times 0,5^6 = \frac{20}{64} = \boxed{0,3125}.$$

$\{Y \geq 5\}$ est la réunion des événements disjoints $\{Y = 5\}$ et $\{Y = 6\}$:

$$P(Y \geq 5) = \binom{6}{5} \times 0,5^6 + \binom{6}{6} \times 0,5^6 = \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{64} = \boxed{0,109375}.$$

Exercice 3 : Les cinq ascenseurs d'un immeuble de bureaux

7 points

- 1) Pour chacun des cinq ascenseurs, on observe une épreuve à deux issues : « immobilisé » (succès), de probabilité 0,1, ou « en service ». Ces cinq épreuves sont identiques et indépendantes (document 1). X compte le nombre de succès, donc

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(5; 0,1)}.$$

- 2) $\{X = 0\}$ correspond au seul chemin où aucun ascenseur n'est immobilisé :

$$P(X = 0) = 0,9^5 = \boxed{0,59049}.$$

$0,59049 > 0,5$: les cinq ascenseurs fonctionnent tous un peu plus d'un jour sur deux. **L'affirmation (1) est confirmée.**

- 3) $E(X) = np = 5 \times 0,1 = \boxed{0,5}$.

Sur un grand nombre de jours ouvrés, le nombre moyen d'ascenseurs immobilisés par jour est 0,5. **L'affirmation (2) est confirmée.**

- 4) $\{X = 1\}$ est réalisé par $\binom{5}{1} = 5$ chemins (l'ascenseur en panne peut être n'importe lequel des cinq), chacun de probabilité $0,1 \times 0,9^4$:

$$P(X = 1) = 5 \times 0,1 \times 0,9^4 = 5 \times 0,1 \times 0,6561 = \boxed{0,32805}.$$

L'événement $\{X \geq 2\}$ est le contraire de $\{X = 0\} \cup \{X = 1\}$:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,59049 - 0,32805 = \boxed{0,08146}.$$

- 5) Notons N le nombre de jours, parmi 250, où au moins deux ascenseurs sont immobilisés. N suit la loi binomiale de paramètres 250 et 0,08146, donc

$$E(N) = 250 \times 0,08146 = 20,365.$$

En moyenne, il faut donc s'attendre à **une vingtaine de jours par an** avec au moins deux ascenseurs immobilisés, et non à trois au plus.

L'affirmation (3) n'est pas compatible avec le document 1.

Conclusion : les affirmations (1) et (2) découlent bien des données du constructeur, mais le gestionnaire sous-estime d'un facteur voisin de 7 la fréquence des jours où deux ascenseurs ou plus sont à l'arrêt.