

Calculatrice autorisée (mode examen)

Dans tout le sujet, les résultats sont demandés sous forme de **valeurs exactes** (fractions ou nombres décimaux) : aucun arrondi n'est attendu.

Exercice 1 : Les roulements d'un parc éolien

7 points

Un exploitant de parc éolien équipe les génératrices de ses éoliennes de roulements achetés à trois fabricants : 50 % des roulements proviennent du fabricant A , 30 % du fabricant B et 20 % du fabricant C . Le suivi de maintenance montre qu'au cours des cinq premières années de service, il faut remplacer pour usure prématurée 3 % des roulements du fabricant A , 2 % de ceux du fabricant B et 4,5 % de ceux du fabricant C .

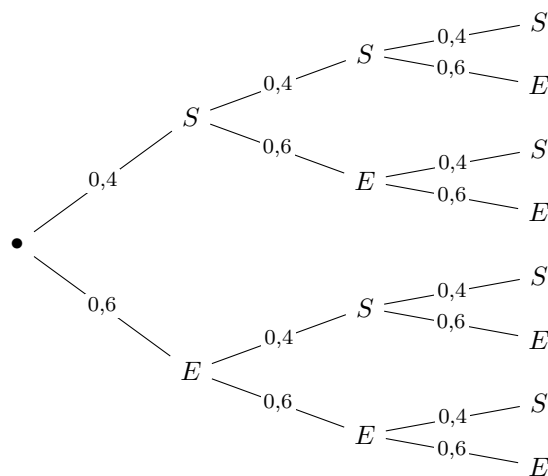
On choisit un roulement au hasard dans le parc et on considère les événements : A : « le roulement provient du fabricant A », B : « ... du fabricant B », C : « ... du fabricant C » et U : « le roulement est remplacé pour usure prématurée au cours de ses cinq premières années ».

- 1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
- 2) Calculer $P(A \cap U)$ et interpréter ce nombre dans le contexte.
- 3) Démontrer que $P(U) = 0,03$.
- 4) Un roulement vient d'être remplacé pour usure prématurée. Quelle est la probabilité qu'il provienne du fabricant C ?
- 5) a. L'événement U est-il indépendant de l'événement A ? Justifier.
b. L'événement U est-il indépendant de l'événement B ? Justifier, puis interpréter le résultat pour l'exploitant.

Exercice 2 : Des chemins dans un arbre

6 points

On répète trois fois, de façon indépendante, une même épreuve à deux issues : le succès S , de probabilité 0,4, et l'échec E . On note X le nombre de succès obtenus au cours des trois épreuves ; X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$.



- 1) a. Combien de chemins de l'arbre réalisent l'événement $\{X = 2\}$? Les écrire sous la forme d'une suite de trois lettres (par exemple $S E E$).
b. En déduire $P(X = 2)$.

- 2) Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 3)$.
- 3) Recopier et compléter le triangle de Pascal ci-dessous jusqu'à la ligne $n = 6$. Repérer dans ce triangle le nombre trouvé à la question 1) a.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3							
4							
5							
6							

- 4) Une variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,5$. À l'aide du triangle de Pascal, calculer $P(Y = 3)$, puis $P(Y \geq 5)$.

Exercice 3 : Les cinq ascenseurs d'un immeuble de bureaux

7 points

Un immeuble de bureaux est desservi par cinq ascenseurs identiques. On dispose des deux documents suivants.

Document 1 – Extrait de la fiche de fiabilité du constructeur

Pour ce modèle d'ascenseur, la probabilité qu'un appareil soit immobilisé par une panne au cours d'un jour ouvré est égale à 0,1. Les pannes de deux appareils distincts sont indépendantes.

Document 2 – Extrait de la note du gestionnaire de l'immeuble

« (1) Plus d'un jour ouvré sur deux, les cinq ascenseurs fonctionnent tous. (2) En moyenne, un demi-ascenseur est immobilisé chaque jour ouvré. (3) Avoir deux ascenseurs ou plus immobilisés le même jour reste exceptionnel : cela n'arrivera pas plus de trois jours sur les 250 jours ouvrés de l'année. »

On choisit un jour ouvré au hasard et on note X le nombre d'ascenseurs immobilisés ce jour-là. On admet les informations du document 1.

- 1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2) Calculer $P(X = 0)$. L'affirmation (1) du document 2 est-elle confirmée?
- 3) Calculer l'espérance de X . L'affirmation (2) est-elle confirmée?
- 4) Calculer $P(X = 1)$, puis $P(X \geq 2)$.
- 5) On admet que le nombre de jours, parmi les 250 jours ouvrés d'une année, où au moins deux ascenseurs sont immobilisés suit une loi binomiale de paramètres 250 et $P(X \geq 2)$. L'affirmation (3) est-elle compatible avec le document 1? Justifier.