

Exercice 1 : La vitesse du son

10 points

- 1) L'intersection des axes correspond à $v = 320 \text{ m/s}$ (et $T = -15 \text{ °C}$) : l'axe des ordonnées ne commence pas à 0, ce qui permet de bien voir les variations de la vitesse, toutes comprises entre 325 et 349 m/s.

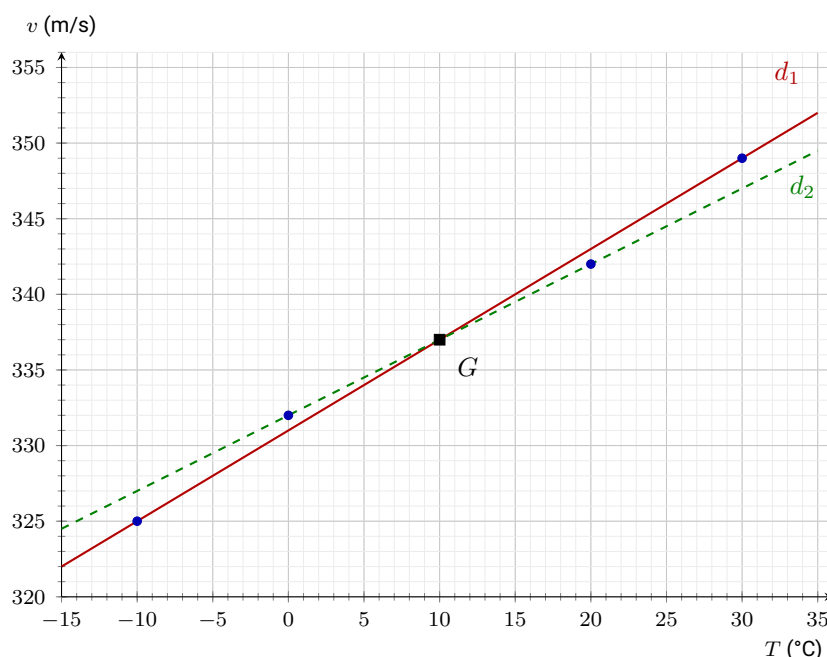
Les points sont presque alignés : un ajustement affine paraît justifié.

$$2) \bar{T} = \frac{-10 + 0 + 10 + 20 + 30}{5} = \frac{50}{5} = 10 \quad \text{et} \\ \bar{v} = \frac{325 + 332 + 337 + 342 + 349}{5} = \frac{1685}{5} = 337.$$

Le point moyen est $G(10; 337)$. Il est placé sur le graphique ci-dessous.

- 3) Toute droite passant par G et laissant à peu près autant de points au-dessus qu'en dessous convient. Par exemple, la droite passant par G et proche des points extrêmes $(-10; 325)$ et $(30; 349)$: c'est d'ailleurs la droite d_1 étudiée ensuite.

- 4) d_1 passe par $(0; 331)$ et $(30; 349)$; d_2 passe par $(0; 332)$ et $(30; 347)$. Les deux droites passent par G : $0,6 \times 10 + 331 = 337$ et $0,5 \times 10 + 332 = 337$.



- 5) a. Pour d_1 , par exemple en $T = -10$: $0,6 \times (-10) + 331 = -6 + 331 = 325$; pour d_2 en $T = -10$: $-5 + 332 = 327$.

Température T (°C)	-10	0	10	20	30
Vitesse prévue par d_1	325	331	337	343	349
Écart $v - (0,6T + 331)$	0	1	0	-1	0
Vitesse prévue par d_2	327	332	337	342	347
Écart $v - (0,5T + 332)$	-2	0	0	0	2

b. $S_1 = 0^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2$ $S_2 = (-2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2^2 = 8$.

Comme $S_1 < S_2$, la droite d_1 ajuste mieux le nuage selon le critère des moindres carrés.
Remarque : d_2 passe exactement par trois points, mais elle s'écarte de 2 m/s aux deux extrémités, et le carré amplifie ces grands écarts.

6) $S_3 = (-0,4)^2 + 0,8^2 + 0^2 + (-0,8)^2 + 0,4^2 = 0,16 + 0,64 + 0 + 0,64 + 0,16 = 1,6$.

La droite des moindres carrés est celle qui rend cette somme la plus petite possible. Or $S_3 = 1,6 < S_1 = 2$: d_1 n'est pas la droite des moindres carrés, même si elle en est très proche (coefficients 0,6 et 331 contre 0,58 et 331,2).

7) $v = 0,6 \times 15 + 331 = 9 + 331 = 340 \text{ m/s}$. C'est une interpolation : 15 °C est compris entre -10 et 30 °C.

8) a. $v = 0,6 \times (-25) + 331 = -15 + 331 = 316 \text{ m/s}$.

C'est une **extrapolation**, car -25 °C est en dehors de l'intervalle des mesures (-10 à 30 °C). Elle reste cependant proche des données : la prévision est plausible.

b. $v = 0,6 \times (-550) + 331 = -330 + 331 = 1 \text{ m/s}$.

Cette prévision **n'a aucun sens** : une température de -550 °C n'existe pas, puisqu'aucune température ne peut descendre sous -273 °C. Le modèle affine, établi entre -10 et 30 °C, ne peut pas être prolongé aussi loin.

Comparaison : à -25 °C, on sort à peine du domaine des mesures et la prévision reste crédible ; à -550 °C, l'extrapolation est démesurée et conduit à une situation physiquement impossible. Plus on s'éloigne des données, moins une extrapolation est fiable.

Exercice 2 : Vrai ou faux ?

10 points

1) **Vrai.** Premier groupe (budgets 2, 3, 4) : $G_1 \left(\frac{2+3+4}{3}; \frac{29+33+37}{3} \right) = G_1(3; 33)$.

Second groupe (budgets 6, 7, 8) : $G_2 \left(\frac{6+7+8}{3}; \frac{44+46+51}{3} \right) = G_2(7; 47)$.

Coefficient directeur : $a = \frac{47-33}{7-3} = \frac{14}{4} = 3,5$. Ordonnée à l'origine : $33 = 3,5 \times 3 + b$, d'où $b = 33 - 10,5 = 22,5$.

La droite de Mayer a bien pour équation $y = 3,5x + 22,5$.

2) **Vrai.** La droite de Mayer donne, pour $x = 4$: $y = 3,5 \times 4 + 22,5 = 14 + 22,5 = 36,5$.
Le chiffre d'affaires réel est 37 k€, et $37 > 36,5$: il est bien supérieur à l'estimation.

3) **Faux.** Avec les six mois : $\bar{x} = \frac{30}{6} = 5$ et $\bar{y} = \frac{240}{6} = 40$, donc $G(5; 40)$.

Avec le septième mois : $\bar{x} = \frac{30+5}{7} = \frac{35}{7} = 5$ (inchangé), mais $\bar{y} = \frac{240+45}{7} = \frac{285}{7}$. Comme $7 \times 40 = 280 \neq 285$, on a $\frac{285}{7} \neq 40$ (environ 40,7).

L'abscisse de G ne change pas, mais son ordonnée change : le point moyen n'est pas le même.

4) **Faux.** Le calcul donne bien $3,5 \times 100 + 22,5 = 372,5 \geq 350$, mais c'est une **extrapolation** déme-

surée : les budgets observés vont de 2 à 8 k€, et 100 k€ en est plus de douze fois le maximum. Rien n'indique que le chiffre d'affaires continuerait d'augmenter au même rythme (la clientèle d'une boutique n'est pas illimitée).

On ne peut rien affirmer pour un tel budget à partir de cet ajustement.

- 5) **Faux.** Les budgets qui diffèrent de 1 k€ sont 2 et 3 (+4 k€), 3 et 4 (+4 k€), 6 et 7, 7 et 8 (+5 k€). Contre-exemple : entre 6 et 7 k€ de budget, le chiffre d'affaires passe de 44 à 46 k€, soit +2 k€ seulement.

Le coefficient 3,5 de la droite de Mayer décrit une *tendance moyenne* : il ne garantit pas que chaque mois la suive exactement.