

Exercice 1 : Primitives de fonctions trigonométriques

6 points

On utilise : pour $\omega \neq 0$, une primitive de $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$ est $t \mapsto \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$, et une primitive de $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$ est $t \mapsto -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$.

1) a. $A = 6, \omega = 3 : F_1(t) = -\frac{6}{3} \cos(3t)$, soit $F_1(t) = -2 \cos(3t)$.

Vérification : $F_1'(t) = -2 \times (-3 \sin(3t)) = 6 \sin(3t)$.

b. $A = 3, \omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{4} : F_2(t) = \frac{3}{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vérification : $F_2'(t) = \frac{3}{2} \times 2 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.

c. Une primitive de $t \mapsto t^2$ est $t \mapsto \frac{t^3}{3}$; une primitive de $t \mapsto -2 \sin(4t)$ est $t \mapsto \frac{2}{4} \cos(4t) = \frac{1}{2} \cos(4t)$. D'où

$$F_3(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} \cos(4t).$$

Vérification : $F_3'(t) = t^2 + \frac{1}{2} \times (-4 \sin(4t)) = t^2 - 2 \sin(4t)$.

2) Une primitive de g est $t \mapsto -\frac{-4}{2} \cos(2t) = 2 \cos(2t)$. Les primitives de g sont donc les fonctions $G(t) = 2 \cos(2t) + c, c \in \mathbb{R}$.

$$G\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \iff 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + c = 0 \iff 2 \times \frac{1}{2} + c = 0 \iff c = -1.$$

Donc $G(t) = 2 \cos(2t) - 1$.

3) a. $M(t) = \sin t \times \sin t$: avec la dérivée d'un produit, $M'(t) = \cos t \times \sin t + \sin t \times \cos t = 2 \sin t \cos t$.

$$N(t) = -\cos t \times \cos t : N'(t) = -(-\sin t \times \cos t + \cos t \times (-\sin t)) = 2 \sin t \cos t.$$

M et N ont la même dérivée : ce sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la même fonction $t \mapsto 2 \sin t \cos t$.

b. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante : $M - N$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Calcul direct : $M(t) - N(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ pour tout réel t . On retrouve bien une constante, égale à 1.

Exercice 2 : Le remplissage d'une cuve

8 points

1) $d(0) = \frac{60}{1} = \boxed{60}$, $d(1) = \frac{60}{2} = \boxed{30}$, $d(2) = \frac{60}{3} = \boxed{20}$, $d(3) = \frac{60}{4} = \boxed{15}$ (en L/min).

Sur $[0; 4]$, $t + 1 > 0$. La dérivée de $t \mapsto \frac{1}{t+1}$ est $t \mapsto -\frac{1}{(t+1)^2}$, donc

$$d'(t) = -\frac{60}{(t+1)^2} < 0.$$

La fonction d est décroissante sur $[0; 4]$: le débit diminue au cours du remplissage.

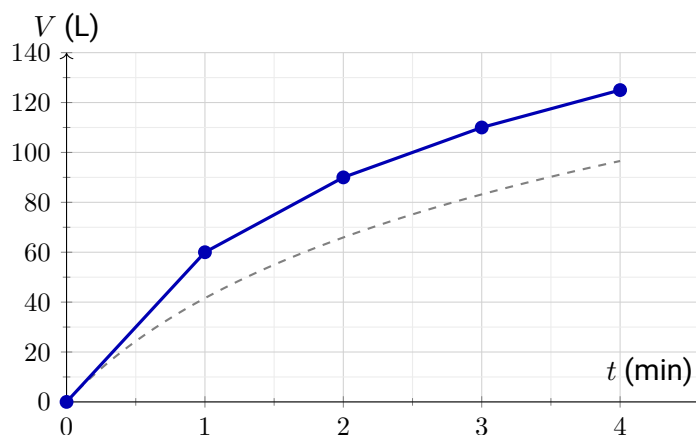
(Autre justification : quand t augmente, $t + 1$ augmente et reste positif, donc $\frac{60}{t+1}$ diminue.)

2) On applique $V_{k+1} = V_k + 1 \times d(k)$:

- $V_1 = 0 + 60 = 60$;
- $V_2 = 60 + 30 = 90$;
- $V_3 = 90 + 20 = 110$;
- $V_4 = 110 + 15 = 125$.

t (min)	0	1	2	3	4
V_k (L)	0	60	90	110	125

3) On place les points $(0; 0)$, $(1; 60)$, $(2; 90)$, $(3; 110)$ et $(4; 125)$, puis on les relie (en bleu). En pointillés gris, pour comparaison, la courbe de V donnée par le logiciel (non demandée).



4) a. La méthode donne $V_4 = 125$ L, alors que $V(4) \approx 96,6$ L : elle a surestimé le volume.

Explication : à chaque étape, on fait comme si le débit restait égal à sa valeur au début de la minute, $d(k)$, pendant toute la minute. Or d est décroissante : pendant la minute qui suit l'instant k , le débit réel est inférieur ou égal à $d(k)$. Le volume réellement versé pendant cette minute est donc inférieur à $d(k) \times 1$, et chaque étape ajoute trop d'eau. Les erreurs s'accumulent d'une étape à l'autre.

b. Les écarts avec 96,6 L sont d'environ 28,4 L avec un pas de 1, 13,2 L avec un pas de 0,5 et

2,4 L avec un pas de 0,1. Les valeurs restent supérieures à 96,6 L (surestimation, pour la même raison), mais plus le pas est petit, plus l'approximation est précise.

Exercice 3 : La charge d'un condensateur

6 points

Étape 1 : la charge. Comme $q'(t) = i(t)$, la fonction q est une primitive de i sur $[0 ; 4]$:

$$q(t) = 12t - 3 \times \frac{t^2}{2} + c = 12t - 1,5t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Le condensateur est initialement déchargé : $q(0) = 0$, donc $c = 0$ et $q(t) = 12t - 1,5t^2$ (en mC).

Vérification : $q'(t) = 12 - 3t = i(t)$.

Étape 2 : la tension. $u(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{12t - 1,5t^2}{2} = 6t - 0,75t^2$ (en V).

Étape 3 : la tension maximale. On cherche le maximum de u sur $[0 ; 4]$. Sa dérivée est

$$u'(t) = \frac{q'(t)}{2} = \frac{i(t)}{2} = \frac{12 - 3t}{2}.$$

Or $12 - 3t \geq 0 \iff t \leq 4$: sur $[0 ; 4]$, $u'(t) \geq 0$ (nul seulement en $t = 4$). La tension est donc croissante pendant toute la charge, et elle est maximale à la fin, en $t = 4$:

$$q(4) = 12 \times 4 - 1,5 \times 16 = 48 - 24 = 24 \text{ mC}, \quad u(4) = \frac{24}{2} = 12 \text{ V}.$$

Conclusion. La tension aux bornes du condensateur ne dépasse jamais 12 V pendant la charge, et $12 < 16$:

le condensateur ne risque pas d'être endommagé.

Remarque : l'erreur fréquente consiste à chercher le maximum de l'intensité (atteint en $t = 0$). C'est la charge, et donc la tension, qu'il faut étudier : elle augmente tant que le courant circule dans le sens de la charge, c'est-à-dire tant que $i(t) \geq 0$.