

Calculatrice interdite

Exercice 1 : Primitives de fonctions trigonométriques

6 points

- 1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes.
 - a. $f_1(t) = 6 \sin(3t)$
 - b. $f_2(t) = 3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
 - c. $f_3(t) = t^2 - 2 \sin(4t)$
- 2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = -4 \sin(2t)$. Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ telle que $G\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.
- 3) On considère les fonctions M et N définies sur $\mathbb{R}$ par $M(t) = \sin^2 t$ et $N(t) = -\cos^2 t$, où $\sin^2 t$ désigne $(\sin t)^2$.
 - a. Montrer que M et N sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ d'une même fonction, que l'on précisera.
 - b. Que peut-on en déduire pour la fonction $M - N$? Retrouver ce résultat par un calcul direct.

Exercice 2 : Le remplissage d'une cuve

8 points

Une cuve de récupération d'eau, vide au départ, est remplie par une pompe pendant 4 minutes. Le débit de la pompe diminue à mesure que la cuve se remplit : à l'instant t (en minutes), il vaut, en litres par minute,

$$d(t) = \frac{60}{t+1} \quad \text{pour } t \in [0; 4].$$

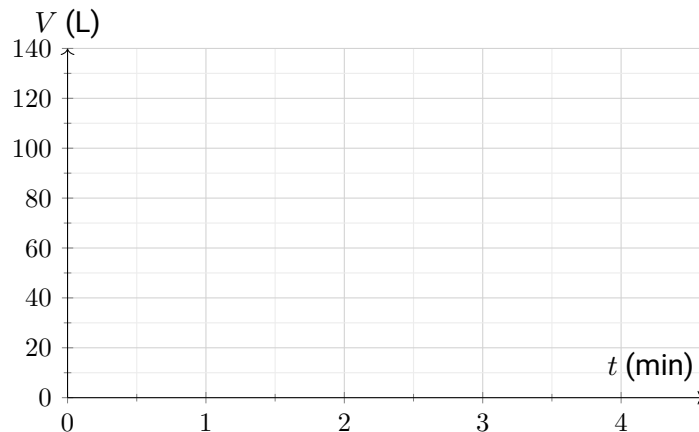
On note $V(t)$ le volume d'eau dans la cuve, en litres, à l'instant t . Ainsi $V(0) = 0$ et, le débit étant la dérivée du volume, $V'(t) = d(t)$. On ne connaît pas, en Première, d'expression d'une primitive de d : on utilise la méthode d'Euler avec un pas de 1 minute, qui repose sur l'approximation

$$V(t+1) \approx V(t) + 1 \times d(t).$$

- 1) Calculer $d(0)$, $d(1)$, $d(2)$ et $d(3)$. Justifier que la fonction d est décroissante sur $[0; 4]$.
- 2) Recopier et compléter le tableau suivant, qui donne les valeurs approchées V_k de $V(k)$ obtenues par la méthode d'Euler.

t (min)	0	1	2	3	4
V_k (L)	0				

- 3) Dans le repère ci-dessous, placer les points de coordonnées $(k; V_k)$ et les relier par des segments : on obtient une approximation de la courbe de la fonction V .



- 4) Un logiciel de calcul indique que le volume réellement atteint au bout de 4 minutes est $V(4) \approx 96,6$ L.
- La méthode d'Euler a-t-elle surestimé ou sous-estimé ce volume? En utilisant le sens de variation de d , expliquer pourquoi.
 - En refaisant le calcul avec un pas de 0,5 minute, on obtient $V(4) \approx 109,7$ L; avec un pas de 0,1 minute, on obtient $V(4) \approx 99,0$ L. Commenter ces résultats.

Exercice 3 : La charge d'un condensateur

6 points

Un condensateur de capacité $C = 2$ mF, initialement déchargé, est chargé pendant 4 secondes. L'intensité du courant qui le traverse, en milliampères (mA), est donnée par

$$i(t) = 12 - 3t \quad \text{pour } t \in [0; 4], t \text{ en secondes.}$$

La charge du condensateur, en millicoulombs (mC), est notée $q(t)$: on a $q(0) = 0$ et, l'intensité étant la dérivée de la charge, $q'(t) = i(t)$. La tension aux bornes du condensateur, en volts, est $u(t) = \frac{q(t)}{C}$, avec $q(t)$ en mC et C en mF.

Le fabricant indique que la tension aux bornes de ce condensateur ne doit jamais dépasser 16 V.

Le condensateur risque-t-il d'être endommagé pendant ces 4 secondes de charge?

Toute démarche, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.