

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

5 points

- 1) On développe : $F(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$. Donc $F'(x) = 4x^3 + 2 \times 2x + 0 = 4x^3 + 4x = f(x)$ pour tout réel x .

F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$: l'affirmation 1 est vraie.

- 2) Les fonctions $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 1$ ont toutes deux pour dérivée $x \mapsto x^2$: ce sont deux primitives différentes de $x \mapsto x^2$. Plus généralement, toutes les fonctions $x \mapsto \frac{x^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$, conviennent.

L'affirmation 2 est fausse.

- 3) La dérivée de $t \mapsto \cos(2t)$ est $t \mapsto -2 \sin(2t)$. Donc la dérivée de $t \mapsto -2 \cos(2t)$ est $t \mapsto -2 \times (-2 \sin(2t)) = 4 \sin(2t)$, et non $\sin(2t)$.

L'affirmation 3 est fausse. Une primitive de $t \mapsto \sin(2t)$ est $t \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2t)$.

- 4) Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante : il existe un réel c tel que, pour tout réel x , $G(x) = F(x) + c$. En $x = 1$: $G(1) = F(1) + c$, et comme $F(1) = G(1)$, on obtient $c = 0$. Donc $G(x) = F(x)$ pour tout réel x .

L'affirmation 4 est vraie.

- 5) La fonction $G : t \mapsto t^3 - 2t + 2$ est bien une primitive de $t \mapsto 3t^2 - 2$ (sa dérivée est $3t^2 - 2$), mais $G(1) = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 2$.

L'affirmation 5 est fausse. La bonne primitive est $t \mapsto t^3 - 2t + c$ avec $1 - 2 + c = 2$, soit $c = 3$: $t \mapsto t^3 - 2t + 3$.

Exercice 2 : La production d'une installation photovoltaïque

7 points

- 1) $P(6) = 2,4 \sin\left(\frac{\pi}{12} \times 6\right) = 2,4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,4 \times 1 = 2,4$.

À midi ($t = 6$), l'installation fournit une puissance de 2,4 kW; c'est sa puissance maximale, car $\sin$ ne dépasse pas 1.

$P(12) = 2,4 \sin(\pi) = 0$: à 18 h, au coucher du soleil, l'installation ne produit plus rien.

- 2) $P(t) = A \sin(\omega t)$ avec une amplitude $A = 2,4 \text{ kW}$ et une pulsation $\omega = \frac{\pi}{12} \text{ rad/h}$.

- 3) a. Une primitive de $t \mapsto \sin(\omega t)$ est $t \mapsto -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t)$. Avec $\omega = \frac{\pi}{12}$, on a $\frac{1}{\omega} = \frac{12}{\pi}$, et $2,4 \times \frac{12}{\pi} = \frac{28,8}{\pi}$. Une primitive de P est

$$t \mapsto -\frac{28,8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right).$$

Vérification : sa dérivée est $-\frac{28,8}{\pi} \times \left(-\frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right)\right) = 2,4 \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right) = P(t)$.

b. E est la primitive de P qui s'annule en 0 : $E(t) = -\frac{28,8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) + c$, avec

$$E(0) = -\frac{28,8}{\pi} \cos(0) + c = -\frac{28,8}{\pi} + c = 0 \iff c = \frac{28,8}{\pi}.$$

Donc $E(t) = \frac{28,8}{\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right)\right)$.

4) Sur toute la journée, de 6 h à 18 h :

$$E(12) = \frac{28,8}{\pi} (1 - \cos \pi) = \frac{28,8}{\pi} \times 2 = \frac{57,6}{\pi} \approx 18,3 \text{ kWh}.$$

5) Entre 6 h et 10 h (t de 0 à 4) :

$$E(4) = \frac{28,8}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{28,8}{\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{14,4}{\pi} \approx 4,58 \text{ kWh}.$$

Entre 10 h et 14 h (t de 4 à 8), l'énergie produite est $E(8) - E(4)$:

$$E(8) - E(4) = \frac{28,8}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{28,8}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{28,8}{\pi} \approx 9,17 \text{ kWh}.$$

Sur deux durées égales de 4 heures, l'installation produit deux fois plus entre 10 h et 14 h qu'entre 6 h et 10 h : le soleil est alors au plus haut et la puissance proche de son maximum. Ces quatre heures autour de midi fournissent à elles seules la moitié de la production de la journée (9,17 kWh est environ la moitié de 18,33 kWh).

6) Avec la calculatrice (tableau de valeurs de E , arrondies au centième) :

t	5	6	7	8
heure	11 h	12 h	13 h	14 h
$E(t)$ (kWh)	6,79	9,17	11,54	13,75

$E(6) \approx 9,17 < 10$ et $E(7) \approx 11,54 > 10$; comme E est croissante ($E' = P \geq 0$), la production cumulée dépasse 10 kWh entre 12 h et 13 h : à partir de 13 h, l'énergie produite depuis le matin dépasse la consommation du foyer.

Exercice 3 : Méthode d'Euler et programme Python

8 points

Partie A

- 1) F est une primitive de f , donc $F'(t) = f(t)$. Pour h proche de 0, l'approximation affine de F au voisinage de t donne

$$F(t+h) \approx F(t) + h \times F'(t) = F(t) + h \times f(t).$$

Graphiquement, on remplace la courbe de F par sa tangente au point d'abscisse t sur un petit intervalle.

- 2) On calcule de proche en proche, avec $y_{k+1} = y_k + 0,5 \times f(t_k)$:

- $y_1 = 0 + 0,5 \times 1 = 0,5$;
- $f(0,5) = \frac{1}{1,25} = 0,8$ et $y_2 = 0,5 + 0,5 \times 0,8 = 0,9$;
- $f(1) = \frac{1}{2} = 0,5$ et $y_3 = 0,9 + 0,5 \times 0,5 = 1,15$;
- $f(1,5) = \frac{1}{3,25} = \frac{4}{13} \approx 0,308$ et $y_4 = 1,15 + 0,5 \times \frac{4}{13} = 1,15 + \frac{2}{13} \approx 1,304$;
- $f(2) = \frac{1}{5} = 0,2$ (cette valeur ne sert pas pour y_4).

k	0	1	2	3	4
t_k	0	0,5	1	1,5	2
$f(t_k)$	1	0,8	0,5	$\approx 0,308$	0,2
y_k	0	0,5	0,9	1,15	$\approx 1,304$

- 3) y_4 approche $F(t_4) = F(2)$: $F(2) \approx 1,304$.

Partie B

- 4) La ligne 8 traduit la relation $y_{k+1} = y_k + h \times f(t_k)$:

$$y = y + h * f(t)$$

L'ordre des lignes 8 et 9 compte : on utilise $f(t)$ avant d'avancer t de h .

- 5) Dans la partie A, on fait 4 étapes de pas 0,5 : l'appel est `euler(0.5, 4)`. Il renvoie 1.3038461538461537, soit 1,304 arrondi au millième, comme à la main.

- 6) a. La fonction part de $t = 0$ et ajoute n fois le pas h : elle s'arrête à $t = n \times h$. Or $10 \times 0,1 = 100 \times 0,01 = 1000 \times 0,001 = 1$. Les trois appels s'arrêtent donc en $t = 1$ et renvoient une valeur approchée de $F(1)$, avec des pas de plus en plus petits.

- b. $\frac{\pi}{4} \approx 0,785398$. Écarts, arrondis à 10^{-5} :

pas h	valeur renvoyée	écart avec $\frac{\pi}{4}$
0,1	0,809 98 ...	$\approx 0,024\,58$
0,01	0,787 89 ...	$\approx 0,002\,50$
0,001	0,785 65 ...	$\approx 0,000\,25$

Quand le pas est divisé par 10, l'écart est environ divisé par 10. Plus le pas est petit, plus l'approximation est précise (mais plus le calcul demande d'étapes).

- c. Dans la partie A, $F(1) = F(t_2)$ était approché par $y_2 = 0,9$. L'écart avec $\frac{\pi}{4}$ est d'environ 0,115 : c'est moins précis que les trois valeurs de la console, ce qui est cohérent avec un pas plus grand (0,5).

On remarque que toutes les valeurs obtenues dépassent $\frac{\pi}{4}$: sur $[0; +\infty[$, f est décroissante, et la méthode utilise à chaque étape la valeur de f au début du pas, qui est la plus grande du pas.