

Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

5 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1) **Affirmation 1** : la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (x^2 + 1)^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 4x^3 + 4x$.
- 2) **Affirmation 2** : la fonction $x \mapsto x^2$ admet une seule primitive sur $\mathbb{R}$.
- 3) **Affirmation 3** : la fonction $t \mapsto -2 \cos(2t)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \sin(2t)$.
- 4) **Affirmation 4** : si F et G sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ d'une même fonction et si $F(1) = G(1)$, alors $F(x) = G(x)$ pour tout réel x .
- 5) **Affirmation 5** : la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto 3t^2 - 2$ qui prend la valeur 2 en $t = 1$ est la fonction $t \mapsto t^3 - 2t + 2$.

Exercice 2 : La production d'une installation photovoltaïque

7 points

Une maison est équipée de panneaux photovoltaïques. Par une journée de printemps sans nuages, le soleil se lève à 6 h et se couche à 18 h. On note t le temps écoulé, en heures, depuis 6 h. La puissance électrique fournie par l'installation, en kilowatts (kW), est modélisée sur $[0; 12]$ par

$$P(t) = 2,4 \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right).$$

On note $E(t)$ l'énergie électrique produite, en kilowattheures (kWh), entre 6 h et l'instant t . Ainsi $E(0) = 0$ et, la puissance étant la dérivée de l'énergie par rapport au temps, $E'(t) = P(t)$ pour tout $t \in [0; 12]$.

- 1) Calculer $P(6)$ et $P(12)$. Interpréter ces deux valeurs dans le contexte.
- 2) Donner l'amplitude et la pulsation ω de la fonction P .
- 3)
 - a. Déterminer une primitive de la fonction P sur $[0; 12]$.
 - b. En déduire l'expression de $E(t)$ pour $t \in [0; 12]$.
- 4) Calculer l'énergie produite sur toute la journée. Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie au dixième de kWh.
- 5) Calculer l'énergie produite entre 6 h et 10 h, puis entre 10 h et 14 h (valeurs arrondies au centième). Comparer et commenter.
- 6) Ce jour-là, le foyer consomme 10 kWh. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle heure (heure entière) l'énergie produite depuis le lever du soleil dépasse cette consommation.

Exercice 3 : Méthode d'Euler et programme Python

8 points

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. On ne connaît pas, en Première, d'expression d'une primitive de cette fonction. On note F la primitive de f sur $[0; +\infty[$ telle que $F(0) = 0$: c'est la solution du problème

$$y' = f(t) \quad \text{et} \quad y(0) = 0.$$

On cherche des valeurs approchées de $F(t)$ par la méthode d'Euler.

Partie A : à la main, avec un pas de 0,5

- 1) Expliquer pourquoi, pour un réel h proche de 0, on a $F(t+h) \approx F(t) + h \times f(t)$.
- 2) On pose $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ et, pour tout entier k , $t_{k+1} = t_k + 0,5$ et $y_{k+1} = y_k + 0,5 \times f(t_k)$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous (valeurs arrondies au millièmè si nécessaire).

k	0	1	2	3	4
t_k	0	0,5			
$f(t_k)$	1				
y_k	0				

- 3) Quelle valeur approchée de $F(2)$ obtient-on ?

Partie B : avec un programme

On programme la méthode d'Euler en langage Python. La fonction `euler(h, n)` part de $t = 0$, $y = 0$ et effectue n étapes de pas h .

```

1 def f(t):
2     return 1 / (1 + t**2)
3
4 def euler(h, n):
5     t = 0
6     y = 0
7     for k in range(n):
8         y = .....
9         t = t + h
10    return y

```

Dans la console, on obtient :

```

>>> euler(0.1, 10)
0.8099814972267897
>>> euler(0.01, 100)
0.7878939967307816
>>> euler(0.001, 1000)
0.7856481217307804

```

- 4) Compléter la ligne 8 du programme.
- 5) Quel appel de la fonction `euler` donne la valeur approchée de $F(2)$ obtenue dans la partie A ?
- 6)
 - a. Expliquer pourquoi les trois appels de la console donnent tous une valeur approchée de $F(1)$.
 - b. On admet que $F(1) = \frac{\pi}{4}$. Pour chacun des trois appels, calculer l'écart entre la valeur renvoyée et $\frac{\pi}{4}$, arrondi à 10^{-5} près. Comment évolue cet écart lorsque le pas est divisé par 10 ?
 - c. Dans la partie A, quelle valeur approchée de $F(1)$ avait-on obtenue ? Est-elle plus ou moins précise que celles de la console ?