

Exercice 1 : Automatismes (QCM)

5 points

- 1) **Réponse c.** Une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$, donc une primitive de $x \mapsto 6x^2$ est

$$x \mapsto 6 \times \frac{x^3}{3}, \quad \text{soit} \quad \boxed{x \mapsto 2x^3}.$$

Vérification : la dérivée de $2x^3$ est $2 \times 3x^2 = 6x^2$. La réponse a. est la dérivée de $6x^2$, pas une primitive.

- 2) **Réponse a.** F est une primitive de f lorsque $F' = f$. Ici $F'(x) = 3x^2 - 1 + 0 = \boxed{3x^2 - 1}$: la constante 4 disparaît en dérivant.

- 3) **Réponse d.** Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante : il existe un réel c tel que $G(x) - F(x) = c$ pour tout x . En $x = 0$: $c = G(0) - F(0) = 5 - 2 = 3$. Donc $G(x) - F(x) = \boxed{3}$ pour tout réel x .

- 4) **Réponse b.** La dérivée de $\cos$ est $-\sin$, donc la dérivée de $-2 \cos t$ est $-2 \times (-\sin t) = 2 \sin t$. Une primitive est $\boxed{t \mapsto -2 \cos t}$.

La réponse d. ne convient pas : la dérivée de $2 \cos t + 2$ est $-2 \sin t$.

- 5) **Réponse c.** Les primitives de $x \mapsto 2x$ sont les fonctions $x \mapsto x^2 + c$. La condition $F(1) = 0$ donne $1 + c = 0$, soit $c = -1$: $\boxed{F(x) = x^2 - 1}$.

Exercice 2 : Calculs de primitives

4 points

On utilise : une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$, et une primitive d'une somme est la somme des primitives. Toute autre réponse obtenue en ajoutant une constante est également juste.

- 1) $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$: $F(x) = 4 \times \frac{x^4}{4} - 6 \times \frac{x^2}{2} + 5x$, soit $\boxed{F(x) = x^4 - 3x^2 + 5x}$.

Vérification : $F'(x) = 4x^3 - 6x + 5 = f(x)$.

- 2) $g(x) = x^2 + 4x - 1$: $G(x) = \frac{x^3}{3} + 4 \times \frac{x^2}{2} - x$, soit $\boxed{G(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - x}$.

- 3) On développe d'abord : $h(t) = (t-1)(t+3) = t^2 + 3t - t - 3 = t^2 + 2t - 3$.

Une primitive est $\boxed{H(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - 3t}$.

Vérification : $H'(t) = t^2 + 2t - 3 = h(t)$.

- 4) $k(x) = 0,5x^3 + 2$: $K(x) = 0,5 \times \frac{x^4}{4} + 2x$, soit $\boxed{K(x) = \frac{x^4}{8} + 2x}$ (ou $0,125x^4 + 2x$).

Exercice 3 : Le chariot autonome

6 points

1) $v(0) = 1,2 \times 0 - 0,3 \times 0^2 = \boxed{0}$ et $v(4) = 1,2 \times 4 - 0,3 \times 16 = 4,8 - 4,8 = \boxed{0}$.

Le chariot part à l'arrêt du poste de chargement et il est de nouveau à l'arrêt au bout de 4 secondes, quand il arrive au poste de déchargement.

2) $v'(t) = 1,2 - 0,3 \times 2t = \boxed{1,2 - 0,6t}$.

$1,2 - 0,6t > 0 \iff 0,6t < 1,2 \iff t < 2$. La dérivée est positive sur $[0; 2]$, nulle en 2, négative sur $[2; 4]$.

t	0	2	4
$v'(t)$	+	0	-
v	0	1,2	0

$v(2) = 1,2 \times 2 - 0,3 \times 4 = 2,4 - 1,2 = 1,2$. La vitesse maximale est $\boxed{1,2 \text{ m/s, atteinte à } t = 2 \text{ s}}$.

3) Comme $x'(t) = v(t)$, la fonction x est une primitive de v sur $[0; 4]$. Il existe donc un réel c tel que

$$x(t) = 1,2 \times \frac{t^2}{2} - 0,3 \times \frac{t^3}{3} + c = 0,6t^2 - 0,1t^3 + c.$$

La condition $x(0) = 0$ donne $c = 0$. Donc $\boxed{x(t) = 0,6t^2 - 0,1t^3}$.

Vérification : $x'(t) = 1,2t - 0,3t^2 = v(t)$ et $x(0) = 0$.

4) Le chariot arrive au poste de déchargement à $t = 4$:

$$x(4) = 0,6 \times 16 - 0,1 \times 64 = 9,6 - 6,4 = 3,2.$$

Les deux postes sont distants de $\boxed{3,2 \text{ m}}$.

5) $x(2) = 0,6 \times 4 - 0,1 \times 8 = 2,4 - 0,8 = 1,6 \text{ m}$, et $\frac{3,2}{2} = 1,6 \text{ m}$.

$\boxed{\text{Oui}}$: au bout de 2 secondes, à mi-temps, le chariot a parcouru exactement la moitié du trajet. C'est aussi l'instant où sa vitesse est maximale (il accélère pendant la première moitié et freine pendant la seconde).

Exercice 4 : Deux primitives d'une même fonction

5 points

1) $F'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 3x^2 - 6x = f(x)$ pour tout réel x : F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) $G'(x) = 3x^2 - 6x = f(x)$: G est aussi une primitive de f .

$G(x) - F(x) = (x^3 - 3x^2 - 2) - (x^3 - 3x^2 + 2) = -4$ pour tout réel x : les deux primitives diffèrent d'une constante, comme le prévoit le cours.

3) a. Pour tout x , $G(x) = F(x) - 4$: chaque point de $\mathcal{C}_G$ s'obtient en abaissant de 4 unités le point de $\mathcal{C}_F$ de même abscisse. On passe de $\mathcal{C}_F$ à $\mathcal{C}_G$ par une translation verticale :

translation de 4 unités vers le bas

Sur le graphique : le point $(0; 2)$ de $\mathcal{C}_F$ devient $(0; -2)$ et le point $(2; -2)$ devient $(2; -6)$.

b. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_F$ au point d'abscisse a est $F'(a)$, celui de la tangente à $\mathcal{C}_G$ est $G'(a)$. Or $F'(a) = G'(a) = f(a)$.

Les deux tangentes ont le même coefficient directeur : elles sont parallèles. Par exemple, en $x = 0$ et en $x = 2$, f s'annule et les deux courbes ont une tangente horizontale.

4) H est une primitive de f , donc $H(x) = x^3 - 3x^2 + c$ avec c réel. La courbe passe par $A(2; 1)$ lorsque $H(2) = 1$:

$$2^3 - 3 \times 2^2 + c = 1 \iff 8 - 12 + c = 1 \iff c = 5.$$

Donc $H(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.