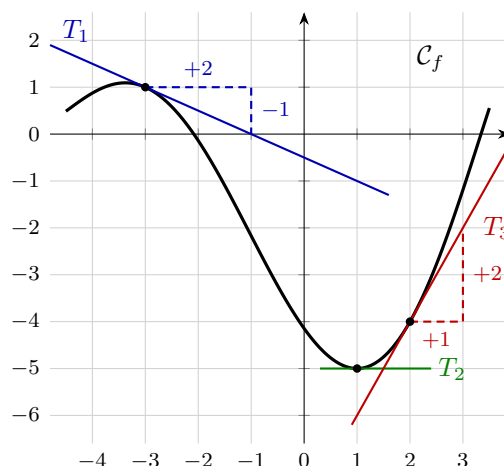


Exercice 1

3 points

Rappel : $f(a)$ est l'ordonnée du point de C_f d'abscisse a ; $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à C_f en ce point. Pour le lire, on choisit deux points de la tangente situés sur des nœuds du quadrillage et on calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (traits en pointillés ci-dessous).



- Le point de tangence de T_1 est $(-3; 1)$, donc $f(-3) = 1$. La tangente T_1 passe par $(-3; 1)$ et $(-1; 0)$:

$$f'(-3) = \frac{0 - 1}{-1 - (-3)} = \frac{-1}{2}, \quad f'(-3) = -\frac{1}{2}.$$

- Le point de tangence de T_2 est $(1; -5)$, donc $f(1) = -5$. La tangente T_2 est horizontale : son coefficient directeur est nul, $f'(1) = 0$.

- Le point de tangence de T_3 est $(2; -4)$, donc $f(2) = -4$. La tangente T_3 passe par $(2; -4)$ et $(3; -2)$:

$$f'(2) = \frac{-2 - (-4)}{3 - 2} = \frac{2}{1}, \quad f'(2) = 2.$$

Exercice 2

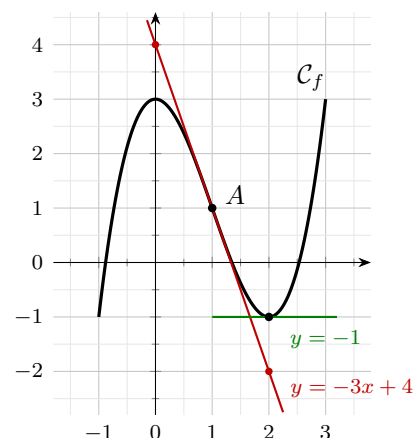
3 points

- 1) a. La tangente à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, avec $f(1) = 1$ (car $A(1; 1) \in C_f$) et $f'(1) = -3$:

$$y = -3(x-1) + 1 \iff y = -3x + 3 + 1.$$

$$y = -3x + 4$$

- b. La tangente passe par $A(1; 1)$ et a pour coefficient directeur -3 : quand x augmente de 1, y diminue de 3. Elle passe donc aussi par $(0; 4)$ et par $(2; -2)$ (en rouge ci-contre).



- 2) Au point d'abscisse 2, la courbe admet un minimum : la tangente y est **horizontale**, d'où $f'(2) = 0$. On lit $f(2) = -1$.

La tangente a pour équation $y = 0 \times (x-2) + (-1)$, soit

$$y = -1.$$

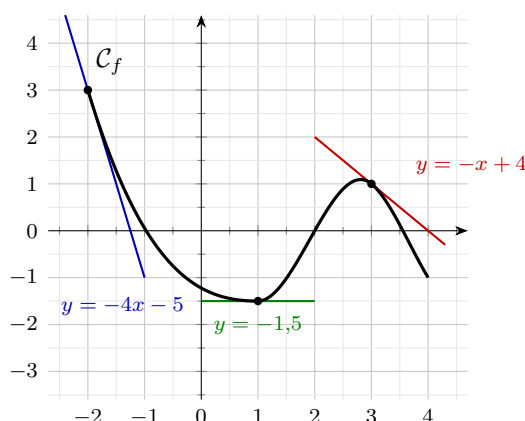
Exercice 3

2,5 points

On commence par traduire chaque donnée en un point de la courbe et une tangente en ce point :

- $f(-2) = 3$ et $f'(-2) = -4$: la courbe passe par $(-2; 3)$ avec une tangente de coefficient directeur -4 , d'équation $y = -4(x+2) + 3$, soit $y = -4x - 5$ (elle passe par $(-1; -1)$);
- $f(1) = -1,5$ et $f'(1) = 0$: la courbe passe par $(1; -1,5)$ avec une tangente horizontale $y = -1,5$;
- la tangente en 3 est $y = -x + 4$: son coefficient directeur donne $f'(3) = -1$ et le point de tangence a pour ordonnée $f(3) = -3 + 4 = 1$; la courbe passe par $(3; 1)$ et la droite passe aussi par $(4; 0)$.

On trace ces trois segments de tangentes, puis une courbe continue, sans angle, qui passe par les trois points en « épousant » chaque tangente. Par exemple (une infinité de courbes conviennent) :



Vérification : la courbe tracée passe bien par $(-2; 3)$, $(1; -1,5)$ et $(3; 1)$ et y est tangente aux trois droites; on n'attend pas d'autre propriété.

Exercice 4

3 points

Ici $f(x) = 5x^2 - 8x - 10$ et h est un réel non nul.

1) On calcule $f(1) = 5 - 8 - 10 = -13$ et

$$f(1+h) = 5(1+h)^2 - 8(1+h) - 10 = 5 + 10h + 5h^2 - 8 - 8h - 10 = 5h^2 + 2h - 13.$$

Le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{5h^2 + 2h - 13 - (-13)}{h} = \frac{h(5h+2)}{h} = 5h + 2.$$

Quand h tend vers 0, $5h + 2$ tend vers 2, qui est un nombre réel : f est dérivable en 1 et

$$\boxed{f'(1) = 2}.$$

Vérification : pour $h = 1$, $\frac{f(2) - f(1)}{1} = -6 - (-13) = 7$ et $5 \times 1 + 2 = 7$.

2) La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$:

$$y = 2(x - 1) + (-13) \iff y = 2x - 2 - 13 \iff \boxed{y = 2x - 15}.$$

C'est bien l'équation annoncée.

Exercice 5

3,5 points

1) Soit a un réel et h un réel non nul. Pour la fonction carré $f : x \mapsto x^2$:

$$f(a+h) - f(a) = (a+h)^2 - a^2 = a^2 + 2ah + h^2 - a^2 = 2ah + h^2 = h(2a+h).$$

Donc le taux d'accroissement entre a et $a+h$ vaut

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h.$$

Quand h tend vers 0, $2a + h$ tend vers $2a$, qui est un nombre réel : la fonction carré est dérivable en a et $\boxed{f'(a) = 2a}$.

Ce raisonnement vaut pour **tout** réel a : la fonction carré est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est

$$\boxed{f'(x) = 2x \text{ pour tout réel } x}.$$

2) Soit h un réel non nul tel que $-2 + h \neq 0$ (c'est-à-dire $h \neq 2$, ce qui est le cas pour h proche de

0). On a $g(-2) = -\frac{1}{2}$ et

$$g(-2+h) - g(-2) = \frac{1}{h-2} + \frac{1}{2} = \frac{2+(h-2)}{2(h-2)} = \frac{h}{2(h-2)}.$$

Le taux d'accroissement de g entre -2 et $-2+h$ vaut donc

$$\frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \frac{h}{2h(h-2)} = \frac{1}{2(h-2)}.$$

Quand h tend vers 0, $2(h-2)$ tend vers -4 , donc le taux tend vers $-\frac{1}{4}$: g est dérivable en -2 et

$$g'(-2) = -\frac{1}{4}.$$

Vérification : pour $h = 0,1$, $\frac{1}{2 \times (-1,9)} \approx -0,263$, proche de $-0,25$.

Exercice 6

5 points

Ici $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 4}{x^2 - 2x + 2}.$

1) a. Pour $x^2 - 2x + 2 = 0$: $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$, donc

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4.$$

$\Delta < 0$: l'équation n'a aucune solution réelle, $S = \emptyset$.

b. Le dénominateur $x^2 - 2x + 2$ ne s'annule pour aucun réel x ; le quotient est donc calculable pour tout réel : f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) $f(2) = \frac{2^2 + 4 \times 2 - 4}{2^2 - 2 \times 2 + 2} = \frac{8}{2}$, donc $f(2) = 4$.

$$f'(2) = \frac{-6 \times 2^2 + 12 \times 2}{(2^2 - 2 \times 2 + 2)^2} = \frac{-24 + 24}{4}, \text{ donc } f'(2) = 0.$$

3) La tangente (T) au point d'abscisse 2 a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit $y = 0 \times (x - 2) + 4$:

$$(T) : y = 4$$

(tangente horizontale).

- 4) a. Pour tout réel x , en mettant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f(x) - 4 &= \frac{x^2 + 4x - 4 - 4(x^2 - 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} = \frac{x^2 + 4x - 4 - 4x^2 + 8x - 8}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{-3x^2 + 12x - 12}{x^2 - 2x + 2}. \end{aligned}$$

Or $-3x^2 + 12x - 12 = -3(x^2 - 4x + 4) = -3(x - 2)^2$, donc

$$f(x) - 4 = \frac{-3(x - 2)^2}{x^2 - 2x + 2}.$$

- b. • Numérateur : $(x - 2)^2 \geq 0$, donc $-3(x - 2)^2 \leq 0$, avec égalité seulement pour $x = 2$.
• Dénominateur : $\Delta < 0$ (question 1) et le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$, donc $x^2 - 2x + 2 > 0$ pour tout réel x .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-3(x - 2)^2$	-	0	-
$x^2 - 2x + 2$	+	+	+
Q	-	0	-

$Q < 0$ pour tout $x \neq 2$, et $Q = 0$ pour $x = 2$.

- c. Pour tout réel x , $f(x) - 4 = Q \leq 0$, donc $f(x) \leq 4$: la courbe (C) est **en dessous** de la droite $(T) : y = 4$, et elles n'ont qu'un point commun, le point de tangence $(2 ; 4)$.

(C) est située sous (T) et la touche seulement en $(2 ; 4)$.

Vérification : $f(0) = \frac{-4}{2} = -2 \leq 4$ et $f(3) = \frac{17}{5} = 3,4 \leq 4$.