

## Exercice 1

8 points

Le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$  et  $D$  est le milieu de  $[BC]$  : la médiane  $(AD)$  est aussi la hauteur issue de  $A$ , donc  $(AD) \perp (BC)$  et  $D$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ . De plus  $BD = DC = 3$ .

- 1) On a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ . Le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(BD)$  est  $D$ , donc

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = BD^2 = 3^2 = 9.$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -9}$$

Vérification (repère d'origine  $D$ ,  $B(-3; 0)$ ,  $A(0; 4)$ ) :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  donnent  $-9 + 0 = -9$ .

- 2) a. Comme  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ , on a  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ , d'où la formule des longueurs :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2} (25 + 25 - 36) = \frac{14}{2}.$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7}$$

- b. On a aussi  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 25 \cos \widehat{BAC}$ , donc

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{7}{25} = 0,28 \quad \text{et, à la calculatrice,} \quad \widehat{BAC} = \arccos(0,28) \approx 73,74^\circ.$$

$$\boxed{\widehat{BAC} \approx 74^\circ}$$

Vérification : par Pythagore dans  $ABD$ ,  $AD = \sqrt{25 - 9} = 4$ , donc  $\cos \widehat{BAD} = \frac{4}{5}$  et  $\cos \widehat{BAC} = \cos (2\widehat{BAD}) = 2 \times \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$ .

- 3) a.  $D$  est le milieu de  $[BC]$ , donc  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ ;  $K$  est le milieu de  $[DH]$ , donc  $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HD}$ . Ainsi

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{DC}.$$

Les droites  $(CH)$  et  $(DH)$  sont perpendiculaires (car  $(CH) = (AC)$ ), donc le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(HD)$  est  $H$  :

$$\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{DH} = -DH^2.$$

$$\boxed{\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}DH^2}$$

- b. Avec la relation de Chasles,  $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DB}$ , et  $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HK}$ . En développant :

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{DB}.$$

On calcule chaque terme :

$$\bullet \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \text{ et } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HD} = 0, \text{ car } (AC) \perp (DH);$$

- $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD}$ , donc  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} = -CD^2$  ( $D$  est le projeté de  $A$  sur  $(BC)$ );
- $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CH} = CH^2$  ( $H$  est le projeté de  $D$  sur  $(AC)$ );
- $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HB} = \frac{1}{2} DH^2$ ;
- $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} DH^2$  d'après la question 3) a.

En additionnant :

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{HB} = -CD^2 + CH^2 + \frac{1}{2} DH^2 + \frac{1}{2} DH^2 = CH^2 + DH^2 - CD^2$$

- c. Le triangle  $CHD$  est rectangle en  $H$ . D'après le théorème de Pythagore,  $CD^2 = CH^2 + DH^2$ , donc

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{HB} = CH^2 + DH^2 - CD^2 = 0.$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AK}$  et  $\overrightarrow{HB}$ , non nuls, sont orthogonaux :

$$(AK) \perp (HB)$$

Vérification : l'aire de  $ADC$  vaut  $\frac{3 \times 4}{2} = 6 = \frac{AC \times DH}{2}$ , d'où  $DH = \frac{12}{5}$ , puis

$$CH = \sqrt{9 - \frac{144}{25}} = \frac{9}{5} \quad \text{et} \quad CH^2 + DH^2 - CD^2 = \frac{81}{25} + \frac{144}{25} - 9 = 0.$$

## Exercice 2

7 points

- 1)  $f = uv$  avec  $u(x) = -x + 2$ ,  $u'(x) = -1$  et  $v(x) = e^x$ ,  $v'(x) = e^x$ . Pour tout  $x \in [-1; 2]$  :

$$f'(x) = -e^x + (-x + 2)e^x = (1 - x)e^x.$$

Comme  $e^x > 0$ ,  $f'(x)$  a le signe de  $1 - x$  : positif pour  $x \leq 1$ , négatif pour  $x \geq 1$ . Avec  $f(-1) = 3e^{-1} \approx 1,10$ ,  $f(1) = e \approx 2,72$  et  $f(2) = 0$  :

| $x$     | -1        | 1   | 2 |
|---------|-----------|-----|---|
| $1 - x$ | +         | 0   | - |
| $f'(x)$ | +         | 0   | - |
| $f$     | $3e^{-1}$ | $e$ | 0 |

$f$  est **croissante** sur  $[-1; 1]$  et **décroissante** sur  $[1; 2]$ .

- 2) L'unité vaut 30 cm et la plaque va de  $x = -1$  à  $x = 2$ , soit 3 unités :  $L = 3 \times 30 = 90$  cm, ce qui est cohérent.

Le bord supérieur de la plaque est horizontal et tangent à  $\mathcal{C}_f$  : il touche la courbe en son point le plus haut, c'est-à-dire au maximum de  $f$ , atteint en  $x = 1$  (où  $f'(1) = 0$ , la tangente  $y$  est bien horizontale). La largeur vaut donc  $f(1) = e$  unités :

$$l = 30e \text{ cm} \approx 81,5 \text{ cm}.$$

- 3) La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation  $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ , avec  $f(2) = 0$  et  $f'(2) = (1 - 2)e^2 = -e^2$  :

$$y = -e^2(x - 2), \quad \text{soit} \quad y = -e^2x + 2e^2.$$

### Exercice 3

5 points

- 1) On divise par  $2 > 0$ , puis on utilise la stricte croissance de la fonction exponentielle :

$$2e^{5x^2-1} \leq 2e^{3x} \iff e^{5x^2-1} \leq e^{3x} \iff 5x^2 - 1 \leq 3x \iff 5x^2 - 3x - 1 \leq 0.$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 29 > 0 : \text{deux racines}$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{29}}{10} \approx -0,24 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{29}}{10} \approx 0,84.$$

Le trinôme ( $a = 5 > 0$ ) est négatif ou nul entre ses racines :

$$\mathcal{S} = \left[ \frac{3 - \sqrt{29}}{10}; \frac{3 + \sqrt{29}}{10} \right]$$

- 2)  $f = \frac{u}{v}$  avec  $u(x) = e^{9-8x}$ ,  $u'(x) = -8e^{9-8x}$ , et  $v(x) = x^2 + 3 > 0$ ,  $v'(x) = 2x$ . Pour tout réel  $x$  :

$$f'(x) = \frac{-8e^{9-8x}(x^2 + 3) - 2xe^{9-8x}}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2e^{9-8x}(4x^2 + x + 12)}{(x^2 + 3)^2}$$

Remarque :  $4x^2 + x + 12$  a pour discriminant  $1 - 192 < 0$ , il est toujours positif :  $f'(x) < 0$ ,  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

- 3) a. Pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = e^{2-3(n+1)} = e^{2-3n-3} = e^{2-3n} \times e^{-3} = e^{-3} u_n.$$

$$(u_n) \text{ est géométrique de raison } q = e^{-3} \text{ et de premier terme } u_0 = e^2$$

- b. La raison  $q = e^{-3}$  est différente de 1, donc

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = e^2 \times \frac{1 - e^{-3(n+1)}}{1 - e^{-3}}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par  $e^3$  :  $(1 - e^{-3}) \times e^3 = e^3 - 1$ ,

donc

$$S_n = e^2 \times e^3 \times \frac{1 - e^{-3n-3}}{e^3 - 1} = e^5 \frac{1 - e^{-3n-3}}{e^3 - 1}$$

Vérification : pour  $n = 0$ ,  $e^5 \frac{1 - e^{-3}}{e^3 - 1} = e^5 \times \frac{e^3 - 1}{e^3(e^3 - 1)} = e^2 = u_0 = S_0$ .