

Calculatrice autorisée

Exercice 1

8 points

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = 5$ et $BC = 6$. D est le milieu du segment $[BC]$, H est le projeté orthogonal du point D sur la droite (AC) , et K est le milieu du segment $[DH]$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2) a. Calculer, en utilisant les longueurs, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

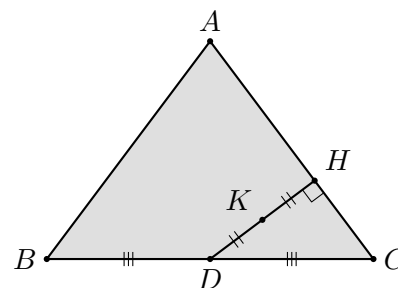
b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près.

3) a. Montrer que $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}DH^2$ en transformant les vecteurs et en utilisant une projection orthogonale.

b. Montrer que $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{HB} = CH^2 + DH^2 - CD^2$.

Aide : on pourra utiliser le fait que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HK}$ et trouver une décomposition simple du vecteur $\overrightarrow{HB}$ à l'aide de la relation de Chasles. Il faut aussi penser à utiliser la question 3) a.

c. Démontrer alors que $(AK) \perp (HB)$.



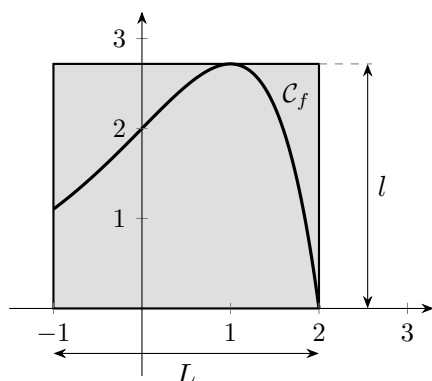
Exercice 2

7 points

Une entreprise de menuiserie réalise des découpes dans des plaques rectangulaires de bois.

Dans le repère orthonormé d'unité 30 cm ci-dessous, on modélise la forme de la découpe dans la plaque rectangulaire par la courbe C_f représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 2]$ par :

$$f(x) = (-x + 2)e^x.$$



Le bord supérieur de la plaque rectangulaire est tangent à la courbe C_f . On nomme L la longueur de la plaque rectangulaire et l sa largeur.

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [-1; 2]$ et en déduire les variations de f sur cet intervalle.

2) La longueur L de la plaque est de 90 cm. Donner la valeur exacte de la largeur l en cm.

3) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Exercice 3**5 points**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^{5x^2-1} \leq 2e^{3x}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{9-8x}}{x^2+3}$. Calculer $f'(x)$.

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{2-3n}$.

a. Démontrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

b. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$S_n = e^5 \frac{1 - e^{-3n-3}}{e^3 - 1}.$$