

Exercice 1

10 points

1) Dérivée. $f = \frac{50}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 7$, $u'(x) = 2x$, et $u(x) \geq 7 > 0$ sur I . Comme $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$:

$$f'(x) = 50 \times \frac{-2x}{(x^2 + 7)^2} = \boxed{\frac{-100x}{(x^2 + 7)^2}}.$$

Signe. Le dénominateur est un carré non nul, donc strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $-100x$, positif sur $[-2; 0]$, négatif sur $[0; 2]$, nul en 0.

Valeurs. $f(-2) = \frac{50}{4+7} = \frac{50}{11}$, $f(0) = \frac{50}{7}$, $f(2) = \frac{50}{11}$.

x	-2	0	2
$f'(x)$	+	0	-
f	$\frac{50}{11}$	$\frac{50}{7}$	$\frac{50}{11}$

f est croissante sur $[-2; 0]$ et décroissante sur $[0; 2]$, de maximum $f(0) = \frac{50}{7} \approx 7,14$.

2) Dérivée. $g'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{7 \times 2x}{2} + 12 = \boxed{x^2 - 7x + 12}$.

Signe. Trinôme avec $a = 1$, $b = -7$, $c = 12$: $\Delta = 49 - 48 = 1 > 0$, racines

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4, \quad \text{donc} \quad g'(x) = (x-3)(x-4).$$

Le trinôme est du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines : positif sur $[0; 3]$ et sur $[4; 5]$, négatif sur $[3; 4]$.

Valeurs.

$$g(0) = -5, \quad g(3) = 9 - \frac{63}{2} + 36 - 5 = \frac{17}{2},$$

$$g(4) = \frac{64}{3} - 56 + 48 - 5 = \frac{25}{3}, \quad g(5) = \frac{125}{3} - \frac{175}{2} + 60 - 5 = \frac{55}{6}.$$

x	0	3	4	5	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	-5	$\frac{17}{2}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{55}{6}$	

g est croissante sur $[0; 3]$ et sur $[4; 5]$, décroissante sur $[3; 4]$.

- 3) Dérivée. $h(x) = G(-3x + 2)$ avec $G(X) = X^3$, $G'(X) = 3X^2$. La dérivée de $x \mapsto G(ax + b)$ est $x \mapsto a G'(ax + b)$, ici avec $a = -3$:

$$h'(x) = -3 \times 3(-3x + 2)^2 = \boxed{-9(-3x + 2)^2}.$$

Signe. Un carré est positif ou nul, donc $h'(x) \leq 0$ sur I , avec $h'(x) = 0$ seulement pour $-3x + 2 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{2}{3}$.

Valeurs. $h(0) = 2^3 = 8$, $h\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, $h(4) = (-10)^3 = -1\,000$.

x	0	$\frac{2}{3}$	4
$h'(x)$	—	0	—
h	8	0	-1 000

La dérivée ne s'annule qu'en un point isolé sans changer de signe :

h est strictement décroissante sur $[0; 4]$.

- 4) Dérivée. Comme $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ sur $]0; 10]$:

$$k'(x) = -2 + \frac{8}{x^2} = \frac{8 - 2x^2}{x^2} = \boxed{\frac{2(2 - x)(2 + x)}{x^2}}.$$

Signe. Sur $]0; 10]$, $x^2 > 0$ et $2 + x > 0$: $k'(x)$ a le signe de $2 - x$, positif sur $]0; 2]$, négatif sur $[2; 10]$, nul en 2.

Valeurs. $k(2) = -4 - 4 = -8$ et $k(10) = -20 - \frac{8}{10} = -20,8$. (k n'est pas définie en 0 : on ne met pas de valeur sous la borne 0.)

x	0	2	10
$k'(x)$	+	0	—
k		-8	-20,8

k est croissante sur $]0; 2]$ et décroissante sur $[2; 10]$, de maximum $k(2) = -8$.

Exercice 2

3 points

1) a. Au démarrage de la campagne, $x = 0$:

$$p(0) = \frac{2 \times 0 + 1}{5 \times 0 + 10} = \boxed{\frac{1}{10} = 0,1}.$$

b. On résout $p(x) = 0,25 = \frac{1}{4}$ pour $x \geq 0$ (alors $5x + 10 > 0$) :

$$\frac{2x + 1}{5x + 10} = \frac{1}{4} \iff 4(2x + 1) = 5x + 10 \iff 8x + 4 = 5x + 10 \iff 3x = 6 \iff x = 2.$$

Au bout de 2 semaines.

Vérification : $p(2) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25.$

2) Dérivée. $p = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = 5x + 10$, $v'(x) = 5$, et $v(x) > 0$ sur $[0 ; 26]$:

$$p'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(5x + 10) - 5(2x + 1)}{(5x + 10)^2} = \frac{10x + 20 - 10x - 5}{(5x + 10)^2} = \boxed{\frac{15}{(5x + 10)^2}}.$$

Signe. Numérateur $15 > 0$ et dénominateur carré non nul : $p'(x) > 0$ sur $[0 ; 26]$.

Valeurs. $p(0) = \frac{1}{10}$ et $p(26) = \frac{53}{140} \approx 0,379.$

x	0	26
$p'(x)$	+	
p	$\frac{1}{10}$	$\frac{53}{140}$

p est strictement croissante sur $[0 ; 26]$: plus la campagne dure, plus le produit est connu.

Exercice 3

3,5 points

1) On développe d'abord $f(t)$:

$$f(t) = 25t^2 - 10t^3 + t^4 + 10 = t^4 - 10t^3 + 25t^2 + 10,$$

donc

$$f'(t) = 4t^3 - 30t^2 + 50t.$$

On développe l'expression proposée :

$$2t(5 - 2t)(-t + 5) = 2t(-5t + 25 + 2t^2 - 10t) = 2t(2t^2 - 15t + 25) = 4t^3 - 30t^2 + 50t.$$

Les deux expressions sont égales : $f'(t) = 2t(5 - 2t)(-t + 5)$.

Autre méthode : $f = u \times u + 10$ avec $u(t) = 5t - t^2$, donc $f' = 2u'u = 2(5 - 2t)(5t - t^2) = 2t(5 - 2t)(5 - t)$.

2) *Signe de $f'(t)$ sur $[0 ; 5]$.* $2t \geq 0$ et $-t + 5 \geq 0$; $5 - 2t$ est positif sur $[0 ; 2,5]$ et négatif sur $[2,5 ; 5]$.

Valeurs. $f(0) = 10$, $f(2,5) = (12,5 - 6,25)^2 + 10 = 6,25^2 + 10 = 39,0625 + 10 = 49,0625$, $f(5) = 0^2 + 10 = 10$.

t	0	2,5	5
$2t$	0	+	+
$5 - 2t$	+	0	-
$-t + 5$	+	+	0
$f'(t)$	0	+	-
f	10	49,0625	10

3) Le maximum de f sur $[0 ; 5]$ est $f(2,5) = 49,0625$ milliers.

Maximum : environ 49 063 singes, au bout de 2,5 ans (2 ans et 6 mois).

(49,0625 milliers = 49 062,5 : un nombre de singes étant entier, on arrondit.)

Exercice 4

3,5 points

1) On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-1,5) \\ -1,5 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3,5 - (-1,5) \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dans un repère orthonormé :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2,5 \times 5 + 0,5 \times 3 = 12,5 + 1,5 = \boxed{14}.$$

2)

$$AB = \sqrt{2,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{6,25 + 0,25} = \sqrt{6,5} = \frac{\sqrt{26}}{2} \approx 2,55$$

$$AC = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \approx 5,83.$$

3) On utilise l'autre expression du produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$, donc

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{14}{\sqrt{6,5} \times \sqrt{34}} = \frac{14}{\sqrt{221}} \approx 0,9417.$$

À la calculatrice (en mode degré) :

$$\widehat{BAC} \approx 19,65^\circ, \quad \text{soit} \quad \boxed{\widehat{BAC} \approx 20^\circ} \text{ à l'unité près.}$$