

Exercice 1

4 points

On lit graphiquement : f est décroissante sur $[-1; 0]$, croissante sur $[0; 3]$ et décroissante sur $[3; 5]$, avec $f(0) = -1$ et $f(3) = 3,5$. On rappelle que, pour une fonction dérivable sur un intervalle, f est croissante sur cet intervalle si et seulement si $f'(x) \geq 0$, et décroissante si et seulement si $f'(x) \leq 0$.

- a. Sur $[3; 5]$, la courbe « descend » : f est décroissante sur $[3; 5]$, donc $f'(x) \leq 0$ pour tout x de $[3; 5]$.

L'affirmation est vraie.

- b. On lit $f(0) = -1 < 0$; or $0 \in [0; 3]$. Plus généralement, la courbe est sous l'axe des abscisses entre 0 et environ 0,9.

L'affirmation est fausse.

Attention : l'affirmation porte sur le *signe* de $f(x)$ (position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses), pas sur les variations de f .

- c. Sur $[-1; 0]$, f est décroissante : par exemple $f(-1) \approx 0,8$ et $f(0) = -1$, donc $-1 < 0$ mais $f(-1) > f(0)$. La fonction f n'est donc pas croissante sur $[-1; 3]$ (elle ne l'est que sur $[0; 3]$).

L'affirmation est fausse.

- d. Sur $[3; 4]$, f est décroissante (la courbe descend de $f(3) = 3,5$ à $f(4) \approx 1,7$) : la dérivée y est négative, et même strictement négative sur $]3; 4]$ puisque la tangente y est inclinée vers le bas. Par exemple $f'(4) < 0$, avec $4 \in [2; 4]$.

L'affirmation est fausse.

Remarque : $f'(x) \geq 0$ est vrai sur $[2; 3]$ seulement; le maximum est atteint en $x = 3$, où $f'(3) = 0$ (tangente horizontale).

Exercice 2

6 points

- 1) f est une fonction polynôme, dérivable sur $[0; 10]$. On dérive terme à terme ($(x^n)' = nx^{n-1}$) :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times 3x^2 + \frac{27}{4} \times 2x - 21 \quad \text{donc} \quad \boxed{f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{27}{2}x - 21.}$$

- 2) $f'(x)$ est un polynôme du second degré avec $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{27}{2}$ et $c = -21$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{27}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-21) = \frac{729}{4} - 126 = \frac{729 - 504}{4} = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2.$$

$\Delta > 0$, donc $f'(x)$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{27}{2} + \frac{15}{2}}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{27}{2} - \frac{15}{2}}{-3} = \frac{-21}{-3} = 7.$$

Vérification : $f'(x) = -\frac{3}{2}(x-2)(x-7)$; en développant, $-\frac{3}{2}(x^2 - 9x + 14) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{27}{2}x - 21$.

Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire entre les racines. Ici $a = -\frac{3}{2} < 0$: $f'(x) < 0$ sur $[0; 2[$ et sur $]7; 10]$, $f'(x) > 0$ sur $]2; 7[$.

On calcule les images utiles :

$$f(0) = 35, \quad f(2) = -4 + 27 - 42 + 35 = 16,$$

$$f(7) = -\frac{343}{2} + \frac{1\,323}{4} - 147 + 35 = \frac{-686 + 1\,323 - 448}{4} = \frac{189}{4} = 47,25,$$

$$f(10) = -500 + 675 - 210 + 35 = 0.$$

x	0	2	7	10	
signe de $f'(x)$	—	0	+	0	—
variations de f	35	16	47,25	0	

3) D'après le tableau de variations, f atteint son maximum sur $[0; 10]$ en $x = 7$, et ce maximum vaut $f(7) = 47,25$ (il est bien supérieur à $f(0) = 35$, la valeur au début de l'intervalle).

x est le temps écoulé depuis 9 h, donc $x = 7$ correspond à $9 + 7 = 16$ h.

Le nombre de clients est maximal à 16 h : environ 47 clients ($f(7) = 47,25$).

Exercice 3

5 points

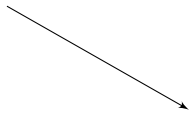
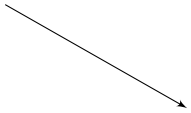
- 1) g est un quotient $\frac{u}{v}$ de fonctions dérivables sur I , avec $v(x) = 3 - x \neq 0$ sur I :

$$u(x) = 2x - 7, \quad u'(x) = 2 \quad v(x) = 3 - x, \quad v'(x) = -1.$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2(3-x) - (2x-7) \times (-1)}{(3-x)^2} = \frac{6-2x+2x-7}{(3-x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{(3-x)^2}$$

Pour tout x de I , $(3-x)^2 > 0$, donc $g'(x) < 0$: g est strictement décroissante sur $] -\infty ; 3[$ et strictement décroissante sur $]3 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $g'(x)$	-		-
variations de g			

Attention : la double barre indique que g n'est pas définie en 3. On ne peut pas dire que g est décroissante sur I tout entier : par exemple $g(2) = -3 < g(4) = -1$ alors que $2 < 4$.

- 2) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $a = 2$ est $y = g'(2)(x-2) + g(2)$, avec

$$g(2) = \frac{2 \times 2 - 7}{3 - 2} = \frac{-3}{1} = -3 \quad \text{et} \quad g'(2) = \frac{-1}{(3-2)^2} = -1.$$

$$y = -1 \times (x-2) + (-3) = -x + 2 - 3 \quad \text{donc} \quad y = -x - 1.$$

Vérification : pour $x = 2$, $y = -2 - 1 = -3 = g(2)$, et le coefficient directeur -1 est bien $g'(2)$.

Exercice 4

5 points

- 1) $h = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2$, $u'(x) = 4x$, $v(x) = x - 2$, $v'(x) = 1$; $v(x) \neq 0$ sur $[3; 10]$, donc h est dérivable sur $[3; 10]$ et

$$h'(x) = \frac{4x(x-2) - 2x^2 \times 1}{(x-2)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 2x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2} \quad \text{soit} \quad h'(x) = \frac{2x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Sur $[3; 10]$: $2x > 0$ et $(x-2)^2 > 0$, donc $h'(x)$ est du signe de $x-4$, qui s'annule en 4.

On calcule :

$$h(3) = \frac{2 \times 9}{1} = 18, \quad h(4) = \frac{2 \times 16}{2} = 16, \quad h(10) = \frac{2 \times 100}{8} = 25.$$

x	3	4	10
$2x$	+		+
$x - 4$	-	0	+
$(x - 2)^2$	+		+
signe de $h'(x)$	-	0	+
variations de h	18	16	25

h est décroissante sur $[3; 4]$ et croissante sur $[4; 10]$.

2) D'après le tableau de variations, sur $[3; 10]$:

- le minimum de h est $h(4) = 16$;
- le maximum de h est la plus grande des deux valeurs aux bornes, $h(3) = 18$ et $h(10) = 25$, soit 25.

$$\text{Pour tout } x \in [3; 10], \quad 16 \leq h(x) \leq 25.$$

Ces bornes sont atteintes (en $x = 4$ et en $x = 10$) : c'est le meilleur encadrement possible.