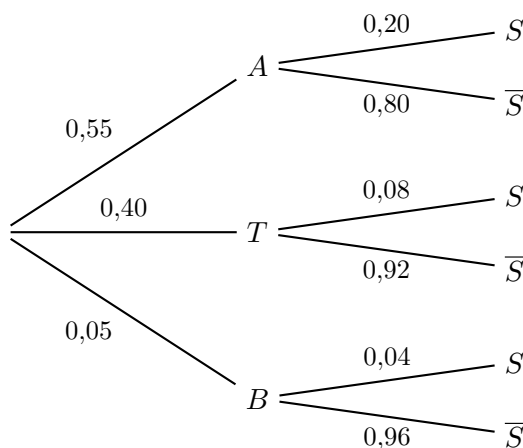


Exercice 1

7 points

- 1) On traduit l'énoncé : $P(A) = 0,55$, $P(T) = 0,40$ et, les autres clients prenant le bus, $P(B) = 1 - 0,55 - 0,40 = 0,05$. Les pourcentages d'assurés sont des probabilités conditionnelles : $P_A(S) = 0,20$, $P_T(S) = 0,08$ et $P_B(S) = 0,04$.



Vérification : les probabilités issues d'un même nœud ont pour somme 1 ($0,55 + 0,40 + 0,05 = 1$, $0,20 + 0,80 = 1$, etc.).

- 2) On cherche $P(T \cap S)$. D'après l'arbre (on multiplie les probabilités le long du chemin) :

$$P(T \cap S) = P(T) \times P_T(S) = 0,40 \times 0,08 = \boxed{0,032}.$$

- 3) Les événements A , T et B forment une partition de l'univers (chaque client prend un et un seul transport). D'après la **formule des probabilités totales** :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(T \cap S) + P(B \cap S) = P(A) \times P_A(S) + P(T) \times P_T(S) + P(B) \times P_B(S).$$

D'où

$$P(S) = 0,55 \times 0,20 + 0,40 \times 0,08 + 0,05 \times 0,04 = 0,11 + 0,032 + 0,002 = \boxed{0,144}.$$

- 4) On sait que le client a souscrit l'assurance : on cherche la probabilité conditionnelle $P_S(B)$.

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,05 \times 0,04}{0,144} = \frac{0,002}{0,144} = \frac{1}{72} \approx \boxed{0,014}.$$

Environ 1,4 % des clients assurés voyagent en bus.

Exercice 2

7 points

Préliminaire : dérivée de f . La fonction f est définie lorsque $x + 1 \neq 0$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et elle y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables. On pose $u(x) = x^2 - x - 1$ et $v(x) = x + 1$, donc $u'(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = 1$. Avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2-x-1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+x-1-x^2+x+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

- 1) a. Une seule valeur interdite : celle qui annule le *dénominateur*, $x + 1 = 0 \iff x = -1$. Les nombres $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sont les racines du *numérateur* $x^2 - x - 1$ ($\Delta = 5$) : ils annulent f , ils ne sont pas interdits. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

L'affirmation est fausse.

- b. La tangente au point d'abscisse a est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$. Or

$$f'(-2) = \frac{(-2) \times 0}{(-1)^2} = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{0 \times 2}{1^2} = 0.$$

L'affirmation est vraie.

- c. La tangente en 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, avec

$$f(1) = \frac{1-1-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{1 \times 3}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Donc } y = \frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}.$$

L'affirmation est vraie.

- d. On étudie le signe de $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ sur $]-1; 0]$: le dénominateur est strictement positif ; pour $-1 < x \leq 0$, on a $x \leq 0$ et $x+2 > 0$, donc $x(x+2) \leq 0$. Ainsi $f'(x) \leq 0$ sur $]-1; 0]$ (nul seulement en 0) : f est *décroissante* sur cet intervalle. Par exemple :

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = -3 < 0.$$

L'affirmation est fausse.

- 2) La courbe de f' doit vérifier les propriétés trouvées ci-dessus :

- $f'(-2) = 0$ et $f'(0) = 0$: la courbe coupe l'axe des abscisses en -2 et en 0 (en particulier elle passe par l'origine) ;
- f' n'est pas définie en -1 mais l'est sur $] -\infty ; -1[$;
- $f'(x) < 0$ sur $]-2 ; -1[$ et sur $]-1 ; 0[$, $f'(x) > 0$ ailleurs.

Courbe a : elle est au-dessus de l'axe des abscisses autour de $x = -1,5$ (alors que $f' < 0$ sur $]-2 ; -1[$) et passe par le point $(0 ; 1)$, or $f'(0) = 0$: ce n'est pas f' (c'est en fait la courbe de $-f$).

Courbe c : elle n'existe pas à gauche de -1 , or f' y est définie.

Courbe d : elle passe par le point $(0; -1)$, or $f'(0) = 0$; de plus elle reste au-dessus de l'axe sur $] -2; -1[$.

Courbe b : elle coupe l'axe des abscisses en -2 et 0 , est sous l'axe entre -2 et 0 (de part et d'autre de -1) et au-dessus ailleurs.

La courbe b représente la dérivée f' .

Remarque : pour $x \neq -1$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$: les valeurs se rapprochent de 1 quand x s'éloigne de -1 , comme sur la courbe b.

3) Bonus. Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. On cherche donc $a \neq -1$ tel que $f'(a) = -8$:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2} = -8 &\iff a^2 + 2a = -8(a+1)^2 && \text{(on multiplie par } (a+1)^2 > 0) \\ &\iff a^2 + 2a + 8a^2 + 16a + 8 = 0 \\ &\iff 9a^2 + 18a + 8 = 0. \end{aligned}$$

$\Delta = 18^2 - 4 \times 9 \times 8 = 324 - 288 = 36 > 0$, d'où deux solutions :

$$a_1 = \frac{-18 - 6}{18} = -\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{-18 + 6}{18} = -\frac{2}{3},$$

toutes deux différentes de -1 . On calcule les ordonnées :

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{16}{9} + \frac{4}{3} - 1}{-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{19}{9}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{19}{3} \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Oui : il y a deux tels points, $A_1\left(-\frac{4}{3}; -\frac{19}{3}\right)$ et $A_2\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Vérification : $f'\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}}{\frac{1}{9}} = -\frac{8}{9} \times 9 = -8$. Les tangentes ont pour équations $y = -8x - 17$ et $y = -8x - 5$.

Exercice 3

6 points

Dérivée. B est une fonction polynôme, dérivable sur $[0 ; 30]$:

$$B'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 22 \times 2x + 384 = x^2 - 44x + 384.$$

Signe de $B'(x)$. C'est un trinôme du second degré : $\Delta = (-44)^2 - 4 \times 1 \times 384 = 1936 - 1536 = 400 = 20^2 > 0$, d'où deux racines

$$x_1 = \frac{44 - 20}{2} = 12 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{44 + 20}{2} = 32, \quad \text{donc} \quad B'(x) = (x - 12)(x - 32).$$

Le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$: le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Sur $[0 ; 30]$ (la racine 32 est hors de l'intervalle), $B'(x) > 0$ sur $[0 ; 12[$ et $B'(x) < 0$ sur $]12 ; 30]$.

Variations. On calcule $B(0) = 0$,

$$B(12) = \frac{1}{3} \times 1728 - 22 \times 144 + 384 \times 12 = 576 - 3168 + 4608 = 2016,$$

$$B(30) = \frac{1}{3} \times 27\,000 - 22 \times 900 + 384 \times 30 = 9000 - 19\,800 + 11\,520 = 720.$$

x	0	12	30
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	0	2016	720

Conclusion. B admet sur $[0 ; 30]$ un maximum égal à $B(12) = 2016$, atteint pour $x = 12$. Comme x est en milliers de tablettes et B en milliers d'euros :

Il faut produire 12 000 tablettes ; le bénéfice maximal vaut alors 2 016 000 €.

(La valeur est exacte : aucun arrondi n'est nécessaire.)

Exercice 4

10 points

- 1) Le type 1 ajoute 100 € par an; le type 2 multiplie le salaire par $1 + \frac{8}{100} = 1,08$ chaque année :

$$u_2 = 1200 + 100 = \boxed{1300} \quad \text{et} \quad v_2 = 1100 \times 1,08 = \boxed{1188}.$$

- 2) a. La cellule B3 contient u_2 , calculé à partir de u_1 situé en B2 : $\boxed{=B2+100}$.
b. De même, C3 contient $v_2 = v_1 \times 1,08$: $\boxed{=C2*1,08}$ (ou $=C2*1.08$ selon le tableur).

- 3) a. Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + 100$ et $v_{n+1} = 1,08 \times v_n$.

(u_n) est arithmétique de raison 100 et (v_n) est géométrique de raison 1,08.

- b. Les suites commencent au rang 1, donc $u_n = u_1 + (n-1)r$ et $v_n = v_1 \times q^{n-1}$:

$$\boxed{u_n = 1200 + 100(n-1) = 1100 + 100n} \quad \boxed{v_n = 1100 \times 1,08^{n-1}}.$$

Vérification : $u_2 = 1100 + 200 = 1300$ et $v_2 = 1100 \times 1,08 = 1188$.

- 4) L'inégalité s'écrit $v_n > u_n$. Dans le tableur : pour $n = 8$, $v_8 \approx 1885,21 < u_8 = 1900$; pour $n = 9$, $v_9 \approx 2036,02 > u_9 = 2000$ (et ensuite la colonne C reste au-dessus de la colonne B).

$$\boxed{n = 9}$$

Interprétation : à partir de la 9^e année, le salaire mensuel du contrat de type 2 dépasse celui du contrat de type 1.

- 5) a. Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique : on multiplie le nombre de termes par la moyenne du premier et du dernier terme.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = n \times \frac{1200 + 1100 + 100n}{2} = \boxed{50n^2 + 1150n}.$$

Vérification : pour $n = 2$, $50 \times 4 + 1150 \times 2 = 2500 = 1200 + 1300$.

- b. Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1,08 \neq 1$:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1100 \times \frac{1 - 1,08^n}{1 - 1,08} = 1100 \times \frac{1,08^n - 1}{0,08}.$$

Or $\frac{1100}{0,08} = 13\,750$, donc

$$\boxed{v_1 + v_2 + \dots + v_n = 13\,750 (1,08^n - 1)}.$$

Vérification : pour $n = 2$, $13\,750 \times (1,1664 - 1) = 2288 = 1100 + 1188$.

- c. Les variables. n est le numéro de l'année; S est le total des salaires perçus depuis l'embauche avec le contrat de type 1 et T avec le contrat de type 2 (le salaire mensuel de l'année n , $u_n = 1200 + 100(n-1)$ ou $v_n = 1100 \times 1,08^{n-1}$, est multiplié par 12 mois). Au départ, S et T contiennent les gains de la première année.

Ce que fait l'algorithme. Tant que le total perçu avec le type 1 est supérieur ou égal à celui du type 2, on passe à l'année suivante et on ajoute à chaque total les douze salaires de cette année. La boucle s'arrête dès que $T > S$, et l'algorithme affiche le numéro de cette année.

Résultat. Exécuté, le programme affiche bien 13 : après 12 ans, $S = 252\,000$ € et $T \approx 250\,498$ €; après 13 ans, $S = 280\,800$ € et $T \approx 283\,738$ €. Ces valeurs se retrouvent avec les sommes précédentes : $S = 12(50n^2 + 1150n)$ et $T = 12 \times 13\,750 (1,08^n - 1)$.

Interprétation : c'est au bout de 13 années que le total des salaires perçus avec le contrat de type 2 dépasse, pour la première fois, celui perçu avec le contrat de type 1. Le type 2 n'est donc avantageux, au total, que pour un employé qui reste au moins 13 ans dans l'entreprise.