

Exercice 1

5 points

- 1) Par définition, $f'(1)$ est la limite, quand h tend vers 0, du taux d'accroissement $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 3h - 1) = 0 + 0 - 1 = -1.$$

Réponse a. : $f'(1) = -1$

Remarque : la réponse b. ne peut pas convenir, $f'(1)$ est un nombre et ne dépend pas de h .

- 2) On lit les coordonnées : E(2 ; 3), F(0 ; -1), G(4 ; 3) et H(5 ; 0).

$f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente (EF) et $f'(4)$ celui de la tangente (GH) :

$$f'(2) = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2 \qquad f'(4) = \frac{y_H - y_G}{x_H - x_G} = \frac{0 - 3}{5 - 4} = -3.$$

Réponse c. : $f'(2) = 2$

Les réponses a. et b. sont fausses puisque $f'(4) = -3$, et d. est fausse puisque $f'(2) = 2$.

- 3) Chaque année, on ajoute 3,4 mm au niveau de l'année précédente : $u_{n+1} = u_n + 3,4$ pour tout entier naturel n .

Réponse c. : (u_n) est arithmétique de raison 3,4

Une suite géométrique correspondrait à une hausse en pourcentage (multiplier par un même nombre), ce qui n'est pas le cas ici.

- 4) On utilise la formule $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ avec $n = 2020$:

$$S = \frac{2020 \times 2021}{2} = 1010 \times 2021 = 2\,041\,210.$$

Réponse b. : $S = 2\,041\,210$

Remarque : la somme d'entiers est un entier, ce qui élimine d'emblée la réponse c.

- 5) Il faut additionner les 38 termes $u_0, u_1, \dots, u_{37}$: on doit donc partir de $S = u_0 = -2$, puis ajouter les 37 termes $u_1, \dots, u_{37}$, chacun juste après l'avoir calculé.

- S part de 0 et la boucle ajoute $u_1, \dots, u_{37}$: on obtient $u_1 + \dots + u_{37}$, il manque u_0 .
- S part de 0 et la boucle ajoute $u_1, \dots, u_{36}$: il manque u_0 et u_{37} .
- S part de u_0 , puis la boucle ajoute U avant de le mettre à jour : elle ajoute $u_0, u_1, \dots, u_{36}$. On obtient $2u_0 + u_1 + \dots + u_{36}$: u_0 est compté deux fois et u_{37} manque.
- S part de $u_0 = -2$; à chaque passage, U prend la valeur du terme suivant, qui est aussitôt ajouté à S . Après 37 passages, $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{37}$.

Réponse d.

Vérification (les quatre algorithmes programmés en Python et exécutés) : d. renvoie -1 924 145 348 411, qui est bien la somme $u_0 + \dots + u_{37}$, alors que a. renvoie -1 924 145 348 409 (soit cette somme moins u_0), b. -962 072 674 110 et c. -962 072 674 114.

Exercice 2

6 points

- 1) À chaque étape, on ajoute 6 carreaux de plus qu'à l'étape précédente : $v_2 - v_1 = 12 - 6 = 6$. Sur la figure, la troisième couronne compte 3 carreaux par côté de l'hexagone, sans compter deux fois les coins, soit 6×3 carreaux :

$$v_3 = 18$$

- 2) La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 6$ et de premier terme $v_1 = 6$, donc pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = v_1 + (n - 1) \times r = 6 + 6(n - 1) = 6n$$

Vérification : $v_1 = 6$, $v_2 = 12$, $v_3 = 18$.

- 3) Pour l'étape 6 : $v_6 = 6 \times 6 = 36$ carreaux ajoutés.

Nombre total de carreaux posés à la fin de l'étape 6, carreau central compris :

$$1 + v_1 + v_2 + \dots + v_6 = 1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 = 127 \text{ carreaux}$$

- 4) Pour tout $n \geq 1$, $v_k = 6k$ pour $k = 1, \dots, n$, donc en factorisant par 6 :

$$S_n = 6 \times 1 + 6 \times 2 + \dots + 6 \times n = 6(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

Or $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc :

$$S_n = 6 \times \frac{n(n+1)}{2} = 3n(n+1) = 3n^2 + 3n$$

Vérification : $S_6 = 3 \times 36 + 3 \times 6 = 126$, et $126 + 1 = 127$ comme à la question 3).

- 5) On cherche l'entier $n \geq 1$ tel que $3n^2 + 3n + 1 = 3169$:

$$\begin{aligned} 3n^2 + 3n + 1 = 3169 &\iff 3n^2 + 3n - 3168 = 0 \quad (\text{on retranche } 3169) \\ &\iff n^2 + n - 1056 = 0 \quad (\text{on divise par } 3) \end{aligned}$$

Discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1056) = 1 + 4224 = 4225 = 65^2 > 0$. Les deux racines sont

$$n_1 = \frac{-1 - 65}{2} = -33 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-1 + 65}{2} = 32.$$

Seule $n = 32$ est un entier naturel non nul :

L'artisan a fait 32 étapes.

Vérification : $3 \times 32^2 + 3 \times 32 + 1 = 3072 + 96 + 1 = 3169$.

Exercice 3

6 points

- 1) Augmenter de 3 % revient à multiplier par $1 + \frac{3}{100} = 1,03$:

$$u_1 = 220\,000 \times 1,03 = \boxed{226\,600 \text{ visionnages}}$$

- 2) Chaque semaine, le nombre de visionnages est multiplié par 1,03 : pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,03 u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $u_0 = 220\,000$. Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n = 220\,000 \times 1,03^n}$$

- 3) $u_{12} = 220\,000 \times 1,03^{12} \approx 313\,667,395$, d'où, arrondi à l'unité :

$$\boxed{u_{12} \approx 313\,667 \text{ visionnages}}$$

- 4) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = 1,03 u_n - u_n = 0,03 u_n = 0,03 \times 220\,000 \times 1,03^n.$$

Comme $1,03^n > 0$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n :

La suite (u_n) est strictement croissante.

Autre méthode : (u_n) est géométrique de raison $q = 1,03 > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$, donc elle est strictement croissante.

- 5) a. Tant que le nombre de visionnages est strictement inférieur à 500 000, on passe à la semaine suivante et on multiplie u par 1,03 :

```

1 def seuil():
2     u = 220000
3     n = 0
4     while u < 500000:
5         n = n + 1
6         u = 1.03 * u
7     return n

```

- b. La fonction, exécutée, renvoie **28**.

En effet, $u_{27} = 220\,000 \times 1,03^{27} \approx 488\,684 < 500\,000$ et $u_{28} = 220\,000 \times 1,03^{28} \approx 503\,344 \geq 500\,000$; comme la suite est croissante, tous les termes suivants dépassent aussi 500 000.

Conclusion : l'objectif des dirigeants est atteint à partir de 28 semaines après le début de la diffusion : $n = 28$ est le premier rang pour lequel la série dépasse 500 000 visionnages par semaine.

Exercice 4

4 points

Affirmation 1 : vraie.

S est la somme des 19 premiers termes (exposants de 0 à 18) d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{1}{2} \neq 1$. Avec la formule $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$:

$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right) = 2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18}.$$

$$S = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18} : \text{l'affirmation 1 est vraie.}$$

Vérification (calcul exact) : $S = \frac{524\,287}{262\,144}$ et $2 - \frac{1}{262\,144} = \frac{524\,287}{262\,144}$.

Affirmation 2 : fausse.

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est $f'(0)$. $f = \frac{u}{v}$ avec, pour tout $x \neq -2$:

$$u(x) = 3 - x, \quad u'(x) = -1, \quad v(x) = x + 2, \quad v'(x) = 1.$$

Donc, pour tout $x \neq -2$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{-1 \times (x + 2) - (3 - x) \times 1}{(x + 2)^2} = \frac{-x - 2 - 3 + x}{(x + 2)^2} = \frac{-5}{(x + 2)^2}.$$

Donc $f'(0) = \frac{-5}{2^2} = -\frac{5}{4} \neq 1$.

$$\text{Le coefficient directeur vaut } -\frac{5}{4} : \text{l'affirmation 2 est fausse.}$$

Exercice 5

4 points

1) g est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2.$$

2) La tangente au point d'abscisse -1 a pour équation $y = g'(-1)(x + 1) + g(-1)$. Or

$$g(-1) = -1 + 3 - 3 - 63 = -64 \quad \text{et} \quad g'(-1) = 3 - 6 + 3 = 0.$$

D'où $y = 0 \times (x + 1) - 64$, soit

$$y = -64 : \text{c'est la droite } D.$$

3) Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. On

cherche donc les réels x tels que $g'(x) = 3$:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 3 = 3 &\iff 3x^2 + 6x = 0 && \text{(on retranche 3)} \\ &\iff 3x(x + 2) = 0 && \text{(on factorise par } 3x) \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -2. && \text{(produit nul)} \end{aligned}$$

On calcule les ordonnées : $g(0) = -63$ et $g(-2) = -8 + 12 - 6 - 63 = -65$.

Les points cherchés sont $(0; -63)$ et $(-2; -65)$.

Facultatif : Pierre a raison.

Soit a un réel. La tangente à P au point d'abscisse a a pour équation $y = 2a(x-a) + a^2$, soit $y = 2ax - a^2$ (car la dérivée de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$). Elle passe par $A(1; -2)$ si et seulement si :

$$-2 = 2a \times 1 - a^2 \iff a^2 - 2a - 2 = 0. \quad \text{(on ajoute } a^2 - 2a)$$

Discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12 > 0$, d'où deux solutions distinctes :

$$a_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}.$$

Il y a donc exactement deux tangentes à P passant par A , aux points d'abscisses $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$; leurs équations sont

$$y = (2 - 2\sqrt{3})x - 4 + 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad y = (2 + 2\sqrt{3})x - 4 - 2\sqrt{3}.$$

L'affirmation de Pierre est vraie.

Vérification : pour $x = 1$, les deux équations donnent bien $y = -2$.