

## Exercice 1

4 points

- 1) Le trinôme  $x^2 - 6x + 8$  a pour discriminant  $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4 = 2^2 > 0$ . Il a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{6-2}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+2}{2} = 4.$$

$$\boxed{x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)}$$

$$\text{Vérification : } (x-2)(x-4) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8.$$

- 2) Pour tout entier naturel  $n$ , en utilisant la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - a u_{n+1} = 6u_{n+1} - 8u_n - a u_{n+1} = (6-a) u_{n+1} - 8u_n.$$

Si  $a \neq 6$ , on peut mettre  $6-a$  en facteur :

$$v_{n+1} = (6-a) \left( u_{n+1} - \frac{8}{6-a} u_n \right).$$

La parenthèse est égale à  $v_n = u_{n+1} - a u_n$  dès que  $\frac{8}{6-a} = a$ , c'est-à-dire :

$$a(6-a) = 8 \iff 6a - a^2 - 8 = 0 \iff a^2 - 6a + 8 = 0 \iff (a-2)(a-4) = 0 \quad (\text{question 1}).$$

Ainsi, pour  $a = 2$  ou  $a = 4$ , on a  $v_{n+1} = (6-a) v_n$  pour tout  $n$  : la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $6-a$ . Le même calcul vaut pour  $(w_n)$  avec  $b$  à la place de  $a$ .

En choisissant pour  $a$  la plus petite valeur (et donc l'autre valeur pour  $b$ ) :

$$\boxed{a = 2 \quad \text{et} \quad b = 4}$$

Alors  $v_{n+1} = 4 v_n$  :  $(v_n)$  est géométrique de raison 4; et  $w_{n+1} = 2 w_n$  :  $(w_n)$  est géométrique de raison 2.

- 3) Pour tout entier naturel  $n$  :

$$v_n - w_n = (u_{n+1} - 2u_n) - (u_{n+1} - 4u_n) = -2u_n + 4u_n, \quad \text{donc} \quad \boxed{v_n - w_n = 2u_n}.$$

- 4) Premiers termes :  $v_0 = u_1 - 2u_0 = 5 - 2 = 3$  et  $w_0 = u_1 - 4u_0 = 5 - 4 = 1$ .

$(v_n)$  est géométrique de premier terme 3 et de raison 4;  $(w_n)$  est géométrique de premier terme 1 et de raison 2. Pour tout entier naturel  $n$  :

$$\boxed{v_n = 3 \times 4^n} \quad \boxed{w_n = 2^n}$$

D'après la question 3,  $u_n = \frac{v_n - w_n}{2}$ , donc pour tout entier naturel  $n$  :

$$\boxed{u_n = \frac{3 \times 4^n - 2^n}{2}}$$

$$\text{Vérification : } u_0 = \frac{3-1}{2} = 1, u_1 = \frac{12-2}{2} = 5, u_2 = \frac{48-4}{2} = 22, \text{ et par la relation de récurrence } u_2 = 6 \times 5 - 8 \times 1 = 22; \text{ de même } u_3 = 6 \times 22 - 8 \times 5 = 92 = \frac{192-8}{2}.$$

## Exercice 2

4 points

1) a. Pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) \\ &= ax^2 + 2ax + a + bx + b + c - ax^2 - bx - c, \end{aligned}$$

$$P(x+1) - P(x) = 2ax + a + b.$$

Le coefficient  $c$  disparaît.

b. On veut  $2ax + (a + b) = 1 \times x + 0$  pour tout réel  $x$ . Deux polynômes égaux pour tout  $x$  ont les mêmes coefficients, donc :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c \text{ réel quelconque.}$$

c. Ici  $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ , qui vérifie  $P(k+1) - P(k) = k$  pour tout entier  $k$  (question b). On écrit cette égalité pour  $k = 1, 2, \dots, n$  :

$$P(2) - P(1) = 1$$

$$P(3) - P(2) = 2$$

$$\vdots$$

$$P(n+1) - P(n) = n$$

En additionnant ces  $n$  lignes membre à membre, les termes intermédiaires  $P(2), P(3), \dots, P(n)$  s'éliminent deux à deux. Il reste :

$$S_1 = 1 + 2 + \dots + n = P(n+1) - P(1).$$

Or  $P(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  et  $P(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}$ , donc :

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vérification : pour  $n = 4$ ,  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  et  $\frac{4 \times 5}{2} = 10$ .

2) a. Pour tout réel  $x$ , en développant  $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  et  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$  :

$$\begin{aligned} Q(x+1) - Q(x) &= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + c(x+1) + d \\ &\quad - (ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= 3ax^2 + (3a + 2b)x + (a + b + c). \end{aligned}$$

On veut que ce polynôme soit égal à  $x^2$  pour tout réel  $x$ ; on identifie les coefficients :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -a - b = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6}, \quad d \text{ réel quelconque.}$$

b. On prend par exemple  $d = 0$  :  $Q(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$ .

Comme  $Q(k+1) - Q(k) = k^2$  pour tout entier  $k$ , on écrit cette égalité pour  $k = 1, 2, \dots, n$  :

$$Q(2) - Q(1) = 1^2$$

$$Q(3) - Q(2) = 2^2$$

$$\vdots$$

$$Q(n+1) - Q(n) = n^2$$

En additionnant membre à membre, les termes intermédiaires s'éliminent :

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = Q(n+1) - Q(1).$$

Or  $Q(1) = \frac{1 \times 0 \times 1}{6} = 0$  et  $Q(n+1) = \frac{(n+1) \times n \times (2(n+1)-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , donc :

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Remarque : la valeur de  $d$  n'a pas d'importance, car elle s'élimine dans la différence  $Q(n+1) - Q(1)$ .

Vérification : pour  $n = 3$ ,  $1 + 4 + 9 = 14$  et  $\frac{3 \times 4 \times 7}{6} = 14$ .

### Exercice 3

2 points

Pour  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , la fonction dérivée est  $f'(x) = 2ax + b$ , donc le nombre dérivé en  $x_0$  est  $f'(x_0) = 2ax_0 + b$ .

La fonction reçoit les trois coefficients du trinôme et le réel  $x_0$ , et renvoie ce nombre :

```
1 def nb_derive_trinome(a, b, c, x0):
2     return 2*a*x0 + b
```

Vérification (programme exécuté) : `nb_derive_trinome(3, -5, 2, 1)` renvoie 1; en effet, pour  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ ,  $f'(1) = 6 - 5 = 1$ .

Remarque : le paramètre  $c$  n'intervient pas dans le calcul (la dérivée d'une constante est nulle), mais on le garde pour décrire le trinôme en entier.

## Exercice 4

4 points

### Partie A

1)  $g$  est une fonction polynôme, dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $x$  :

$$g'(x) = 3x^2 + 3.$$

Comme  $x^2 \geq 0$ , on a  $g'(x) \geq 3 > 0$  pour tout réel  $x$ .

$g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2)  $g(1) = 1^3 + 3 \times 1 - 4 = \boxed{0}$ .

Comme  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  :

- si  $x < 1$ , alors  $g(x) < g(1)$ , c'est-à-dire  $g(x) < 0$ ;
- si  $x > 1$ , alors  $g(x) > g(1)$ , c'est-à-dire  $g(x) > 0$ .

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0 | +         |

### Partie B

1)  $f = \frac{u}{v}$  avec  $u(x) = -2x^3 + 4x^2$  et  $v(x) = x^2 + 1$ , deux fonctions polynômes dérivables sur  $\mathbb{R}$ .  
Pour tout réel  $x$ ,  $v(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0$  :  $v$  ne s'annule pas, donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Avec  $u'(x) = -6x^2 + 8x$  et  $v'(x) = 2x$ , on a  $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  :

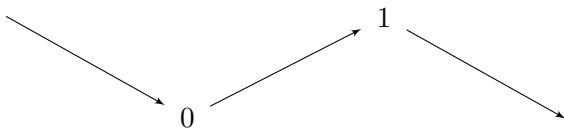
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-6x^2 + 8x)(x^2 + 1) - (-2x^3 + 4x^2) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-6x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 8x + 4x^4 - 8x^3}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^4 - 6x^2 + 8x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x(x^3 + 3x - 4)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-2x \times g(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

2) Le dénominateur  $(x^2 + 1)^2$  est strictement positif :  $f'(x)$  a le signe de  $-2x \times g(x)$ .

- $-2x$  est positif pour  $x < 0$ , nul en 0, négatif pour  $x > 0$ ;
- $g(x)$  est négatif pour  $x < 1$ , nul en 1, positif pour  $x > 1$  (partie A).

Valeurs :  $f(0) = \frac{0}{1} = 0$  et  $f(1) = \frac{-2 + 4}{1 + 1} = 1$ .

|         |                                                                                    |   |   |           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                          | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $-2x$   | +                                                                                  | 0 | - | -         |
| $g(x)$  | -                                                                                  | - | 0 | +         |
| $f'(x)$ | -                                                                                  | 0 | + | 0         |
| $f$     |  |   |   |           |

$f$  est décroissante sur  $]-\infty; 0]$ , croissante sur  $[0; 1]$ , décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

Vérification :  $f'(-1) = -4 < 0$ ,  $f'(\frac{1}{2}) = \frac{38}{25} > 0$ ,  $f'(2) = -\frac{8}{5} < 0$ .

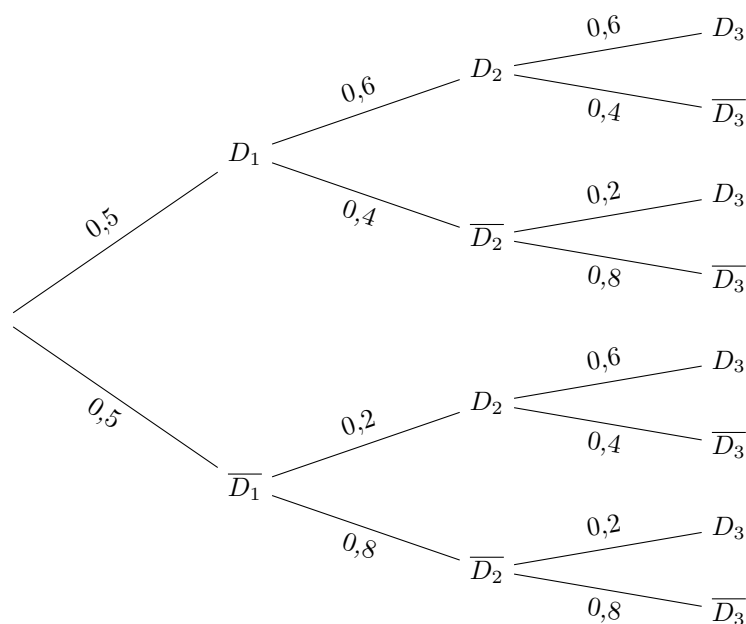
## Exercice 5

4 points

- 1) On note  $\overline{D_k}$  l'événement « la fourmi se déplace vers la gauche au  $k$ -ième mouvement ». D'après l'énoncé,  $P(D_1) = P(\overline{D_1}) = 0,5$  et, pour chaque mouvement suivant :

$$P_{D_k}(D_{k+1}) = 0,6, \quad P_{D_k}(\overline{D_{k+1}}) = 0,4, \quad P_{\overline{D_k}}(\overline{D_{k+1}}) = 0,8, \quad P_{\overline{D_k}}(D_{k+1}) = 0,2.$$

Arbre pondéré des trois premiers mouvements :



- 2) La fourmi part de la case centrale A : il y a deux cases à sa droite et deux cases à sa gauche. Après chaque mouvement, sa position est décalée d'une case. Pour sortir du quadrillage au 3<sup>e</sup> mouvement, elle doit atteindre la 3<sup>e</sup> case à droite ou à gauche de A, ce qui n'est possible qu'en

allant trois fois dans le même sens (un seul changement de sens la ramène à une case au plus de A). Ainsi :

$$S = (D_1 \cap D_2 \cap D_3) \cup (\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3}),$$

deux événements incompatibles. Avec les chemins de l'arbre :

$$P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = 0,5 \times 0,6 \times 0,6 = 0,18 \quad P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3}) = 0,5 \times 0,8 \times 0,8 = 0,32$$

$$P(S) = 0,18 + 0,32 = 0,5$$

*Vérification* : les huit chemins de l'arbre ont pour probabilités 0,18; 0,12; 0,04; 0,16; 0,06; 0,04; 0,08; 0,32, de somme 1.