

Calculatrice autorisée

Exercice 1

4 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.

- 1) Factoriser le polynôme du second degré $x^2 - 6x + 8$.
- 2) Soient a et b deux nombres réels. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - a u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_{n+1} - b u_n.$$

Déterminer la valeur des réels a et b pour que les suites (v_n) et (w_n) soient géométriques. On choisira pour a la plus petite valeur.

- 3) Pour la suite de l'exercice, on suppose $a = 2$ et $b = 4$.
Déterminer $v_n - w_n$ en fonction de u_n pour tout entier naturel n .
- 4) En déduire une expression de v_n , w_n et u_n en fonction de n .

Exercice 2

4 points

Soit n un entier naturel non nul. On souhaite calculer la somme des n premiers entiers naturels non nuls et la somme de leurs carrés. On note

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \quad \text{et} \quad S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2.$$

- 1) Soit P un trinôme tel que, pour tout x réel, $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a , b et c réels et $a \neq 0$.
 - a. Pour tout réel x , exprimer $P(x+1) - P(x)$ en fonction de x , a , b et c .
 - b. Déterminer a , b et c pour que, pour tout x réel, $P(x+1) - P(x) = x$.
 - c. On suppose $a = \frac{1}{2}$, $b = -a$ et $c = 0$. Démontrer que $S_1 = P(n+1) - P(1)$. En déduire l'expression de S_1 .
- 2) Soit Q un polynôme du troisième degré tel que, pour tout x réel, $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec a , b , c et d réels et $a \neq 0$.
 - a. Déterminer a , b , c et d pour que, pour tout x réel, $Q(x+1) - Q(x) = x^2$.
 - b. Démontrer que $S_2 = Q(n+1) - Q(1)$ et en déduire que $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3

2 points

Écrire en langage Python une fonction appelée `nb_derive_trinome` qui calcule le nombre dérivé en un réel x_0 d'une fonction trinôme f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercice 4

4 points

Partie A

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x - 4$.

- 1) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x .

Partie B

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2}{x^2 + 1}$.

- 1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-2x \times g(x)}{(x^2 + 1)^2}$.
- 2) En déduire le tableau de variations de f .

Exercice 5

4 points

Une fourmi se déplace sur les cases ci-dessous en partant de la case A. Pour son premier mouvement, elle se place à droite ou à gauche avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

Si elle se déplace à droite, elle ira à nouveau à droite avec une probabilité 0,6. Si elle se déplace à gauche, elle ira à nouveau à gauche avec une probabilité 0,8. Et ainsi de suite.

		A		
--	--	---	--	--

- 1) Modéliser la situation par un arbre pondéré.
On notera D_k l'événement : « la fourmi se déplace vers la droite au k -ième mouvement ».
- 2) Quelle est la probabilité que la fourmi sorte du quadrillage après le 3^e mouvement ?
On notera S l'événement : « la fourmi sort du quadrillage après le 3^e mouvement ».

Présentation et qualité rédactionnelle

2 points