

Exercice 1

4 points

Fonction h . $h(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{2x - 5}$ existe si et seulement si $2x - 5 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{5}{2}$.

$$D_h =]-\infty; \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$$

h est le quotient de deux fonctions polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur D_h : elle est dérivable sur D_h .

On pose $u(x) = x^2 - 4x + 8$ et $v(x) = 2x - 5$, d'où $u'(x) = 2x - 4$ et $v'(x) = 2$. Avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$h'(x) = \frac{(2x - 4)(2x - 5) - 2(x^2 - 4x + 8)}{(2x - 5)^2} = \frac{4x^2 - 18x + 20 - 2x^2 + 8x - 16}{(2x - 5)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x^2 - 10x + 4}{(2x - 5)^2}$$

Fonction i . La racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$ mais dérivable seulement sur $]0; +\infty[$, donc

$$D_i =]0; +\infty[\quad \text{et} \quad i \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[.$$

On pose $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$, d'où $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Avec $(uv)' = u'v + uv'$, pour $x > 0$:

$$i'(x) = 3\sqrt{x} + (3x - 4) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 3x - 4}{2\sqrt{x}} = \frac{6x + 3x - 4}{2\sqrt{x}}$$

$$i'(x) = \frac{9x - 4}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 2

16 points

1) On part du membre de droite et on réduit au même dénominateur $x - 1$ (non nul sur D_f) :

$$-x + 3 - \frac{4}{x - 1} = \frac{(-x + 3)(x - 1) - 4}{x - 1} = \frac{-x^2 + x + 3x - 3 - 4}{x - 1} = \frac{-x^2 + 4x - 7}{x - 1}.$$

$$\text{Pour tout } x \in D_f, \quad f(x) = -x + 3 - \frac{4}{x - 1}.$$

$$\text{Vérification : } f(0) = \frac{-7}{-1} = 7 \text{ et } -0 + 3 - \frac{4}{-1} = 3 + 4 = 7.$$

2) On étudie le signe de la différence entre $f(x)$ et l'ordonnée du point de Δ de même abscisse :

$$f(x) - (-x + 3) = -\frac{4}{x - 1}.$$

Le numérateur -4 est strictement négatif, donc cette différence est du signe contraire de $x - 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$
$f(x) - (-x + 3)$	$+$	$-$	

Sur $] -\infty ; 1[$, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de Δ ;
sur $] 1 ; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de Δ .

La différence n'étant jamais nulle, $\mathcal{C}_f$ et Δ n'ont aucun point commun.

Remarque : quand x devient très grand (en valeur absolue), $-\frac{4}{x-1}$ devient très proche de 0 : la courbe se rapproche de la droite Δ (on dit que Δ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$, notion vue en Terminale).

- 3) f est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur D_f : elle est dérivable sur D_f .

On pose $u(x) = -x^2 + 4x - 7$ et $v(x) = x - 1$, d'où $u'(x) = -2x + 4$ et $v'(x) = 1$:

$$f'(x) = \frac{(-2x + 4)(x - 1) - (-x^2 + 4x - 7) \times 1}{(x - 1)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 4 + x^2 - 4x + 7}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x - 1)^2}.$$

Or $-(x + 1)(x - 3) = -(x^2 - 3x + x - 3) = -x^2 + 2x + 3$, donc

$$\text{pour tout } x \in D_f, \quad f'(x) = \frac{-(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

Vérification avec la forme de la question 1 : la dérivée de $-\frac{4}{x-1}$ est $\frac{4}{(x-1)^2}$, donc

$$f'(x) = -1 + \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4 - (x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(2-x+1)(2+x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(3-x)(x+1)}{(x-1)^2},$$

c'est bien la même expression.

- 4) Sur D_f , $(x - 1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-(x + 1)(x - 3)$. Le trinôme $-(x + 1)(x - 3)$ a pour racines -1 et 3 et un coefficient de x^2 égal à $-1 < 0$: il est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles. On n'oublie pas la valeur interdite 1 (double barre).

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$-(x+1)(x-3)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$						

Avec $f(-1) = -(-1) + 3 - \frac{4}{-2} = 1 + 3 + 2 = \boxed{6}$ et $f(3) = -3 + 3 - \frac{4}{2} = \boxed{-2}$:

f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[3; +\infty[$;
 f est croissante sur $[-1; 1[$ et sur $]1; 3]$.

Attention : $f(-1) = 6$ est un minimum sur $]-\infty; 1[$ seulement, et $f(3) = -2$ un maximum sur $]1; +\infty[$ seulement (le « minimum » 6 est plus grand que le « maximum » -2 : c'est possible car D_f est coupé en deux).

5) L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, avec

$$f(2) = -2 + 3 - \frac{4}{1} = -3 \quad \text{et} \quad f'(2) = \frac{-(2+1)(2-3)}{(2-1)^2} = \frac{-3 \times (-1)}{1} = 3.$$

$$y = 3(x - 2) - 3 \iff \boxed{y = 3x - 9}$$

Vérification : pour $x = 2$, $3 \times 2 - 9 = -3 = f(2)$.

6) On cherche s'il existe $x \in D_f$ tel que $f'(x) = -1$. D'après la vérification de la question 3, $f'(x) = -1 + \frac{4}{(x-1)^2}$, donc

$$f'(x) = -1 \iff -1 + \frac{4}{(x-1)^2} = -1 \iff \frac{4}{(x-1)^2} = 0.$$

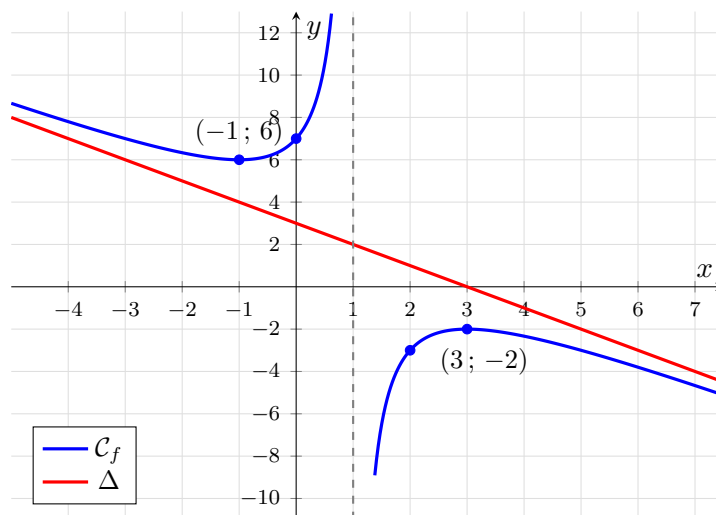
Un quotient est nul seulement si son numérateur est nul; or $4 \neq 0$. Cette équation n'a donc aucune solution.

Aucune tangente à $\mathcal{C}_f$ n'a pour coefficient directeur -1 .

Interprétation : aucune tangente n'est parallèle à la droite Δ (de coefficient directeur -1); on a même $f'(x) > -1$ pour tout $x \in D_f$.

7) On place quelques points (valeurs exactes) en s'appuyant sur le tableau de variations, la droite Δ et la position relative de la question 2; la droite d'équation $x = 1$ (en pointillés) n'est jamais atteinte.

x	-4	-3	-1	0	0,5	1,5	2	3	5	6
$f(x)$	7,8	7	6	7	10,5	-6,5	-3	-2	-3	-3,8



Sur $]-\infty; 1[$, la courbe est au-dessus de Δ ; sur $]1; +\infty[$, elle est en dessous (question 2).

- 8) *Signe de $f(x)$.* Le numérateur $-x^2 + 4x - 7$ est un trinôme de discriminant $4^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = 16 - 28 = -12 < 0$: il garde le signe de son coefficient -1 , il est donc toujours strictement négatif. Ainsi $f(x)$ est du signe contraire de $x - 1$:

$$f(x) > 0 \text{ sur }]-\infty; 1[\quad \text{et} \quad f(x) < 0 \text{ sur }]1; +\infty[.$$

Par définition de la valeur absolue :

$$g(x) = f(x) \text{ sur }]-\infty; 1[\quad \text{et} \quad g(x) = -f(x) \text{ sur }]1; +\infty[.$$

La courbe de g s'obtient donc en gardant la branche gauche de C_f et en remplaçant la branche droite par sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Sur $]1; +\infty[$, g a les variations contraires de celles de f : décroissante sur $]1; 3]$, croissante sur $[3; +\infty[$, avec un minimum $g(3) = 2$.

