

Rappels.

- Suite arithmétique de raison r : $u_n = u_p + (n - p)r$.
- Suite géométrique de raison q : $v_n = v_p \times q^{n-p}$.
- Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}.$$

- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

Exercice 1

3 points

- 1) La suite (V_n) est arithmétique de raison r , donc $V_{18} = V_3 + (18 - 3)r = V_3 + 15r$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 97 &= 22 + 15r \iff 15r = 75 && \text{on retranche 22} \\ &\iff r = 5 && \text{on divise par 15.} \end{aligned}$$

Puis $V_3 = V_0 + 3r$, donc $V_0 = V_3 - 3r = 22 - 15 = 7$.

$$\boxed{r = 5 \quad \text{et} \quad V_0 = 7}$$

Vérification : $V_n = 7 + 5n$ donne $V_3 = 7 + 15 = 22$ et $V_{18} = 7 + 90 = 97$.

- 2) On a $V_2 = 7 + 5 \times 2 = 17$ et $V_{100} = 7 + 5 \times 100 = 507$.

De V_2 à V_{100} , il y a $100 - 2 + 1 = 99$ termes. Donc :

$$S = 99 \times \frac{V_2 + V_{100}}{2} = 99 \times \frac{17 + 507}{2} = 99 \times 262.$$

$$\boxed{S = 25\,938}$$

Exercice 2

3 points

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = (4 - 0,5^{n+1}) - (4 - 0,5^n) = 0,5^n - 0,5^{n+1} = 0,5^n (1 - 0,5) = 0,5 \times 0,5^n = 0,5^{n+1}.$$

Or $0,5^{n+1} > 0$ (puissance d'un nombre strictement positif), donc $U_{n+1} - U_n > 0$, c'est-à-dire $U_{n+1} > U_n$.

$\boxed{\text{La suite } (U_n) \text{ est strictement croissante.}}$

Vérification : $U_0 = 4 - 1 = 3$, $U_1 = 4 - 0,5 = 3,5$, $U_2 = 4 - 0,25 = 3,75$.

- 2) Comme $0 < 0,5 < 1$, la suite géométrique $(0,5^n)$ tend vers 0 : par exemple $0,5^{10} \approx 0,000\,98$ et

$0,5^{20} \approx 0,000\,000\,95$. Donc $U_n = 4 - 0,5^n$ se rapproche de $4 - 0 = 4$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4$$

Remarque : les termes restent tous strictement inférieurs à 4, puisque $0,5^n > 0$.

Exercice 3

7 points

- 1) Augmenter de 2 % revient à multiplier par $1 + \frac{2}{100} = 1,02$. Donc :

$$U_1 = 1\,200 \times 1,02 = 1\,224.$$

$$U_1 = 1\,224 \text{ journaux}$$

- 2) Chaque semaine, le nombre de journaux vendus est multiplié par 1,02 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 1,02 U_n$. La suite (U_n) est donc géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $U_0 = 1\,200$. Par conséquent :

$$U_n = 1\,200 \times 1,02^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 3) On cherche les entiers n tels que $U_n > 1\,500$:

$$\begin{aligned} 1\,200 \times 1,02^n > 1\,500 &\iff 1,02^n > \frac{1\,500}{1\,200} \quad \text{on divise par } 1\,200 > 0 \\ &\iff 1,02^n > 1,25. \end{aligned}$$

À la calculatrice (tableau de valeurs de U_n) :

$$U_{11} = 1\,200 \times 1,02^{11} \approx 1\,492,05 \leq 1\,500 \quad \text{et} \quad U_{12} = 1\,200 \times 1,02^{12} \approx 1\,521,89 > 1\,500.$$

La suite (U_n) est croissante (raison $1,02 > 1$ et premier terme positif), donc $U_n > 1\,500$ pour tout $n \geq 12$.

Le nombre de journaux vendus dépasse 1 500 à partir de 12 semaines.

- 4) a. Le programme multiplie U par 1,02 et ajoute 1 à N tant que U est strictement inférieur à 4 000. Valeurs successives (arrondies au centième) :

N	0	1	2	3	...	58	59	60	61
U	1 200	1 224	1 248,48	1 273,45	...	3 784,35	3 860,04	3 937,24	4 015,98
$U < 4000$?	oui	oui	oui	oui	...	oui	oui	oui	non

La boucle s'arrête quand $U \approx 4\,015,98 \geq 4\,000$, avec $N = 61$.

Le programme affiche 61.

- b. 61 est le plus petit entier n tel que $U_n \geq 4\,000$: $U_{60} \approx 3\,937$ et $U_{61} \approx 4\,016$.

L'agence dépassera les 4 000 journaux vendus par semaine à partir de la 61^e semaine.

c. On remplace le seuil 4 000 par le paramètre s et l'affichage par un renvoi :

```

1 def semaines(s):
2     U = 1200
3     N = 0
4     while U < s:
5         N = N + 1
6         U = 1.02 * U
7     return N

```

Vérification (programme exécuté) : semaines(4000) renvoie 61 et semaines(1500) renvoie 12, en accord avec les questions 3) et 4)a.

5) a. S_n est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique (U_n) , de raison $q = 1,02 \neq 1$ et de premier terme $U_0 = 1\,200$. Donc :

$$S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1\,200 \times \frac{1 - 1,02^{n+1}}{1 - 1,02} = 1\,200 \times \frac{1 - 1,02^{n+1}}{-0,02} = \frac{1\,200}{0,02} \times (1,02^{n+1} - 1).$$

Comme $\frac{1\,200}{0,02} = 60\,000$:

$$S_n = 60\,000 [(1,02)^{n+1} - 1]$$

Vérification : $S_0 = 60\,000 \times 0,02 = 1\,200 = U_0$ et $S_1 = 60\,000 \times (1,02^2 - 1) = 60\,000 \times 0,0404 = 2\,424 = 1\,200 + 1\,224$.

b. Au bout de 52 semaines, on a vendu $U_0 + U_1 + \dots + U_{52} = S_{52}$ journaux :

$$S_{52} = 60\,000 \times (1,02^{53} - 1) \approx 60\,000 \times 1,856\,335 \approx 111\,380,08.$$

Environ 111 380 journaux vendus au total.

Exercice 4

7 points

1) 80 % des 150 élèves renouvellent leur inscription et 40 nouveaux élèves s'inscrivent :

$$U_1 = 0,8 \times 150 + 40 = 120 + 40 = 160.$$

160 élèves inscrits en septembre 2015

2) En septembre de l'année $2014 + n$, il y a U_n inscrits. L'année suivante, 80 % d'entre eux renouvellent leur inscription, soit $0,8 U_n$ élèves, auxquels s'ajoutent 40 nouveaux inscrits. Donc, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = 0,8 U_n + 40$$

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 V_{n+1} &= U_{n+1} - 200 && \text{définition de } (V_n) \\
 &= 0,8 U_n + 40 - 200 && \text{question 2)} \\
 &= 0,8 U_n - 160 \\
 &= 0,8 (U_n - 200) && \text{car } 0,8 \times 200 = 160 \\
 &= 0,8 V_n.
 \end{aligned}$$

De plus $V_0 = U_0 - 200 = 150 - 200 = -50$.

(V_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = -50$.

b. D'après a., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times q^n = -50 \times 0,8^n$. Comme $V_n = U_n - 200$, on a $U_n = V_n + 200$, d'où :

$$U_n = 200 - 50 \times 0,8^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Vérification : $U_0 = 200 - 50 = 150$ et $U_1 = 200 - 50 \times 0,8 = 160$, comme à la question 1).

4) a. On utilise la relation de récurrence $U_{n+1} = 0,8 U_n + 40$ (on pourrait aussi renvoyer directement $200 - 50 * 0.8^{**N}$) :

```

1 def terme(N):
2     U = 150
3     for k in range(N):
4         U = 0.8 * U + 40
5     return U
6
7 # programme principal
8 N = int(input("Rang N : "))
9 print(terme(N))

```

Vérification (programme exécuté) : $\text{terme}(0)$ renvoie 150, $\text{terme}(1)$ renvoie 160 et $\text{terme}(8)$ renvoie environ 191,61.

b. On calcule les termes tant que $U_n \leq 190$:

```

1 def seuil() :
2     n = 0
3     U = 150
4     while U <= 190:
5         n = n + 1
6         U = 0.8 * U + 40
7     return n

```

Vérification (programme exécuté) : `seuil()` renvoie 8, en accord avec la question 5).

5) a. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}
 200 - 50 \times 0,8^n > 190 &\iff -50 \times 0,8^n > -10 && \text{on retranche 200} \\
 &\iff 0,8^n < \frac{-10}{-50} && \text{on divise par } -50 < 0 \text{ (le sens change)} \\
 &\iff 0,8^n < 0,2.
 \end{aligned}$$

À la calculatrice : $0,8^7 \approx 0,2097 > 0,2$ et $0,8^8 \approx 0,1678 < 0,2$.

Comme $0 < 0,8 < 1$, la suite $(0,8^n)$ est décroissante : pour tout $n \geq 8$, $0,8^n \leq 0,8^8 < 0,2$, et pour $n \leq 7$, $0,8^n \geq 0,8^7 > 0,2$.

$$n = 8$$

b. $U_n > 190$ signifie que le nombre d'inscrits dépasse la capacité d'accueil. D'après a., cela se produit pour la première fois au rang $n = 8$, c'est-à-dire en septembre $2014 + 8 = 2022$:

$$U_7 = 200 - 50 \times 0,8^7 \approx 189,5 \leq 190 \quad \text{et} \quad U_8 = 200 - 50 \times 0,8^8 \approx 191,6 > 190.$$

La directrice devra refuser des inscriptions à partir de 2022.