

Exercice 1

2 points

La suite (v_n) est géométrique de raison q , donc pour tous entiers naturels n et p : $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Raison. Avec $n = 5$ et $p = 2$:

$$v_5 = v_2 \times q^3 \iff q^3 = \frac{v_5}{v_2} = \frac{-9\,375}{75} = -125.$$

Or $(-5)^3 = -125$, et -5 est le seul réel dont le cube vaut -125 (la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). Donc

$$\boxed{q = -5}.$$

Premier terme. $v_2 = v_0 \times q^2$, donc

$$v_0 = \frac{v_2}{q^2} = \frac{75}{(-5)^2} = \frac{75}{25} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_0 = 3}.$$

Vérification : $v_2 = 3 \times (-5)^2 = 75$ et $v_5 = 3 \times (-5)^5 = 3 \times (-3\,125) = -9\,375$.

Exercice 2

5 points

- 1) Diminuer une quantité de 8 % revient à la multiplier par le coefficient multiplicateur $1 - \frac{8}{100} = 0,92$.

Les importations diminuant de 8 % chaque année, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,92 u_n.$$

On passe donc d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre : (u_n) est une suite géométrique de raison $\boxed{q = 0,92}$ et de premier terme $u_0 = 85,6$.

- 2) $u_1 = 0,92 \times u_0 = 0,92 \times 85,6 = 78,752$, soit

$$\boxed{u_1 \approx 78,8}.$$

En 2011, les importations de pétrole étaient d'environ 78,8 millions de tonnes.

- 3) La suite étant géométrique, pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n = 85,6 \times 0,92^n$. Donc

$$u_9 = 85,6 \times 0,92^9 \approx 40,417 \quad \text{soit} \quad \boxed{u_9 \approx 40,4}.$$

u_9 correspond à l'année $2010 + 9 = 2019$: en 2019, les importations de pétrole en France étaient d'environ 40,4 millions de tonnes.

- 4) La somme $u_0 + u_1 + \dots + u_9$ compte 10 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 0,92 \neq 1$. D'après la formule

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q},$$

on obtient :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_9 = 85,6 \times \frac{1 - 0,92^{10}}{1 - 0,92} = 85,6 \times \frac{1 - 0,92^{10}}{0,08} \approx 605,204$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_9 \approx 605,2.$$

Cette somme représente la quantité totale de pétrole importée en France de 2010 à 2019 (dix années) : environ 605,2 millions de tonnes.

Vérification : en ajoutant les dix termes un à un (85,6; 78,8; 72,5; 66,7; 61,3; 56,4; 51,9; 47,8; 43,9; 40,4 à la calculatrice, sans arrondir), on retrouve bien 605,2.

Exercice 3

3 points

1) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7}{2}(n+1) + \frac{23}{8} - \left(\frac{7}{2}n + \frac{23}{8} \right) = \frac{7}{2}n + \frac{7}{2} + \frac{23}{8} - \frac{7}{2}n - \frac{23}{8} = \frac{7}{2}.$$

La différence entre deux termes consécutifs est constante : (u_n) est arithmétique de raison $\frac{7}{2}$ et de premier terme $u_0 = \frac{23}{8}$.

L'affirmation 1 est vraie.

Autre justification : u_n est de la forme $u_0 + nr$ avec $u_0 = \frac{23}{8}$ et $r = \frac{7}{2}$.

2) Pour tout entier naturel n , on utilise $4^{2n+1} = 4^{2n} \times 4 = (4^2)^n \times 4 = 16^n \times 4$:

$$w_n = \frac{4 \times 16^n}{3^n} = 4 \times \left(\frac{16}{3} \right)^n.$$

Ainsi w_n est de la forme $w_0 \times q^n$ avec $w_0 = 4$ et $q = \frac{16}{3}$: la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{16}{3}$ et de premier terme 4.

L'affirmation 2 est vraie.

Vérification : $w_0 = \frac{4^1}{3^0} = 4$, $w_1 = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}$ et $\frac{w_1}{w_0} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$.

Exercice 4

5 points

1) B est une fonction polynôme, dérivable sur $[1 ; 20]$. Avec $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$ et $(x)' = 1$:

$$B'(x) = -2 \times 3x^2 + 54 \times 2x - 270 \quad \text{soit} \quad B'(x) = -6x^2 + 108x - 270.$$

2) On étudie le signe de $B'(x)$, trinôme du second degré avec $a = -6$, $b = 108$, $c = -270$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 108^2 - 4 \times (-6) \times (-270) = 11\,664 - 6\,480 = 5\,184 = 72^2 > 0.$$

Deux racines :

$$x_1 = \frac{-108 + 72}{-12} = \frac{-36}{-12} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-108 - 72}{-12} = \frac{-180}{-12} = 15,$$

d'où $B'(x) = -6(x-3)(x-15)$. Le trinôme est du signe de $a = -6 < 0$ à l'extérieur des racines, et du signe contraire entre elles ; 3 et 15 sont bien dans $[1 ; 20]$.

Valeurs utiles :

$$B(1) = -2 + 54 - 270 + 480 = 262, \quad B(3) = -54 + 486 - 810 + 480 = 102,$$

$$B(15) = -6\,750 + 12\,150 - 4\,050 + 480 = 1\,830, \quad B(20) = -16\,000 + 21\,600 - 5\,400 + 480 = 680.$$

x	1	3	15	20	
Signe de $B'(x)$	−	0	+	0	−
Variations de B	262	102	1 830	680	

B est décroissante sur $[1 ; 3]$, croissante sur $[3 ; 15]$, décroissante sur $[15 ; 20]$.

3) D'après le tableau, sur $[1 ; 20]$ le maximum de B est atteint en $x = 15$ (la valeur en $x = 1$, 262, est plus petite que 1 830) et vaut $B(15) = 1\,830$.

Le bénéfice est maximal pour 15 véhicules loués ; il vaut alors 1 830 euros.

Exercice 5

2 points

- 1) $f(x) = -3 \times \frac{1}{x}$. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x) = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{f'(x) = \frac{3}{x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*}.$$

- 2) La fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$ mais dérivable seulement sur $]0; +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$. La constante 7 a pour dérivée 0. Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = 0 - 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{soit} \quad \boxed{f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[}.$$

Bonus : f n'est pas dérivable en 0, car la racine carrée ne l'est pas : son taux d'accroissement entre 0 et $h > 0$, $\frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, devient aussi grand que l'on veut quand h se rapproche de 0. L'ensemble de dérivabilité est donc $]0; +\infty[$.

Exercice 6

3 points

Rappel : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

- 1) En B (abscisse 5) : la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, donc horizontale ; son coefficient directeur est nul.

$$\boxed{f'(5) = 0}.$$

En A (abscisse 0) : la tangente passe par $A(0; 0)$ (lu sur le graphique) et par $E(2; 10)$. Son coefficient directeur vaut

$$f'(0) = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{10 - 0}{2 - 0} \quad \text{soit} \quad \boxed{f'(0) = 5}.$$

- 2) Le signe de f' se lit sur les variations de f : $f'(x) \geq 0$ là où f est croissante.

Graphiquement, f est croissante sur $[0; 5]$ (la courbe monte de A jusqu'à B , où la tangente est horizontale) puis décroissante sur $[5; 18]$, et la seule tangente horizontale est en B . Donc

$$\boxed{\mathcal{S} = [0; 5]}.$$

Cohérence : $f'(0) = 5 > 0$ et $f'(5) = 0$; en D , la tangente « descend », donc $f'(10) < 0$.