

Exercice 1

5 points

- 1) On relie le nombre de points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses au signe de Δ : deux points pour $\Delta > 0$, un seul point (le sommet) pour $\Delta = 0$, aucun pour $\Delta < 0$.
- a) La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points : $\Delta > 0$. **Proposition juste.**
- b) La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points : on aurait $\Delta > 0$, pas $\Delta = 0$. Fausse.
- c) La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses : on aurait $\Delta < 0$. Fausse.
- d) La parabole touche l'axe des abscisses en un seul point, son sommet : on aurait $\Delta = 0$. Fausse.

Réponse a.

- 2) Ici $a = 1$, $b = -2$ et $c = -8$. Comme $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36 > 0$, l'équation a deux racines, et :

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-8}{1} = -8.$$

Vérification : les racines sont $x_1 = \frac{2-6}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{2+6}{2} = 4$; on a bien $-2 + 4 = 2$ et $-2 \times 4 = -8$.

Réponse a.

- 3) Pour $x^2 + x + 2$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$. Le polynôme n'a pas de racine et il est du signe de $a = 1 > 0$ pour tout réel x . Donc $x^2 + x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

Réponse d.

- 4) D'après la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{60}{140} + \frac{21}{140} - \frac{80}{140} = \frac{1}{140}.$$

On contrôle les autres propositions :

- a. $P(A) \times P(B) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{20} = \frac{9}{140} \neq \frac{1}{140} = P(A \cap B)$: A et B ne sont pas indépendants.
- b. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{140} \times \frac{7}{3} = \frac{1}{60} \neq \frac{3}{980}$.
- d. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{140} \times \frac{20}{3} = \frac{1}{21} \neq \frac{1}{60}$.

Réponse c.

- 5) D'après la formule des probabilités totales (A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers) :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,3p + 0,6(1 - p) = 0,6 - 0,3p.$$

$$\text{Donc } P(B) = 0,495 \iff 0,6 - 0,3p = 0,495 \iff -0,3p = -0,105 \iff p = \frac{0,105}{0,3} = 0,35.$$

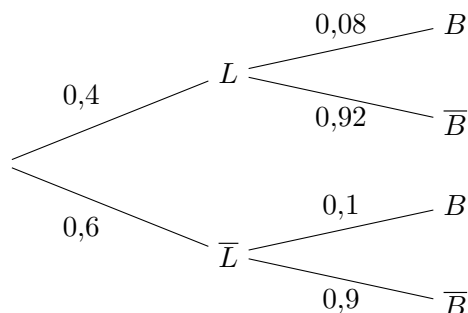
Vérification : $0,3 \times 0,35 + 0,6 \times 0,65 = 0,105 + 0,39 = 0,495$. (La réponse a. est d'ailleurs impossible : une probabilité est inférieure ou égale à 1.)

Réponse d.

Exercice 2

6 points

- 1) Deux étudiants sur cinq sont en cycle licence : $P(L) = \frac{2}{5} = 0,4$, donc $P(\bar{L}) = 0,6$. Parmi eux, 8 % sont au BDS : $P_L(B) = 0,08$; parmi les étudiants de spécialisation, 10 % : $P_{\bar{L}}(B) = 0,1$.



- 2) On cherche $P(L \cap B)$:

$$P(L \cap B) = P(L) \times P_L(B) = 0,4 \times 0,08 = \boxed{0,032}.$$

- 3) L et $\bar{L}$ forment une partition de l'univers; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(L \cap B) + P(\bar{L} \cap B) = 0,032 + 0,6 \times 0,1 = 0,032 + 0,06 = \boxed{0,092}.$$

- 4) Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_B(L) = \frac{P(L \cap B)}{P(B)} = \frac{0,032}{0,092} = \frac{32}{92} = \boxed{\frac{8}{23} \approx 0,348}.$$

Interprétation : parmi les étudiants membres du BDS, environ 34,8 % sont en cycle licence.

- 5) On compare $P(L \cap B)$ et $P(L) \times P(B)$:

$$P(L) \times P(B) = 0,4 \times 0,092 = 0,0368 \quad \text{et} \quad P(L \cap B) = 0,032.$$

Comme $0,0368 \neq 0,032$:

Les événements L et B ne sont pas indépendants.

Autre méthode : $P_L(B) = 0,08 \neq P(B) = 0,092$: être en cycle licence modifie la probabilité d'être au BDS.

Exercice 3

5 points

- 1) D'après l'énoncé, la largeur de l'allée est au moins égale à 0,5 m : $x \geq 0,5$.

La branche horizontale de la croix traverse le jardin dans sa largeur de 6 m : sa largeur x doit être strictement inférieure à 6, sinon l'allée recouvrirait tout le jardin. Donc $x < 6$ (et la condition $x < 8$ pour la branche verticale est alors automatiquement vérifiée).

$$x \in [0,5; 6[$$

- 2) L'aire du jardin est $8 \times 6 = 48 \text{ m}^2$.

L'allée est formée d'une bande verticale de dimensions $x \times 6$ et d'une bande horizontale de dimensions $8 \times x$. Ces deux bandes se chevauchent sur un carré de côté x , compté deux fois; on le retire une fois :

$$A_{\text{allée}} = 6x + 8x - x^2 = 14x - x^2.$$

L'aire restante du jardin vaut $48 - (14x - x^2) = 48 - 14x + x^2$. La condition s'écrit :

$$14x - x^2 \leq 48 - 14x + x^2 \iff 14x - x^2 - 48 + 14x - x^2 \leq 0 \quad \text{on passe tout à gauche} \\ \iff -2x^2 + 28x - 48 \leq 0$$

- 3) Pour $-2x^2 + 28x - 48$: $a = -2$, $b = 28$, $c = -48$.

$$\Delta = 28^2 - 4 \times (-2) \times (-48) = 784 - 384 = 400 = 20^2 > 0.$$

Deux racines :

$$x_1 = \frac{-28 + 20}{2 \times (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-28 - 20}{-4} = \frac{-48}{-4} = 12.$$

Le polynôme est du signe de $a = -2 < 0$ à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	2	12	$+\infty$	
$-2x^2 + 28x - 48$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\mathcal{S} =]-\infty; 2] \cup [12; +\infty[$$

- 4) La largeur x doit à la fois appartenir à $[0,5; 6[$ (question 1) et vérifier l'inéquation (question 3) :

$$[0,5; 6[\cap (]-\infty; 2] \cup [12; +\infty[) = [0,5; 2].$$

La largeur de l'allée doit être comprise entre 0,5 m et 2 m.

Vérification : pour $x = 2$, l'allée mesure $14 \times 2 - 2^2 = 24 \text{ m}^2$, exactement la moitié du jardin.

Exercice 4

4 points

- 1) h est une fonction polynôme du second degré avec $a = -0,525$, $b = 2,1$ et $c = 2,625$. Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas : h admet un **maximum**, atteint en l'abscisse du sommet

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2,1}{2 \times (-0,525)} = \frac{2,1}{1,05} = 2,$$

$$h(2) = -0,525 \times 2^2 + 2,1 \times 2 + 2,625 = -2,1 + 4,2 + 2,625 = 4,725.$$

t	0	2	$+\infty$
$h(t)$	2,625	4,725	

La hauteur maximale est 4,725 m, atteinte au bout de 2 s.

- 2) Le ballon touche le sol lorsque $h(t) = 0$, avec $t \geq 0$:

$$\Delta = 2,1^2 - 4 \times (-0,525) \times 2,625 = 4,41 + 5,5125 = 9,9225 = 3,15^2 > 0.$$

$$t_1 = \frac{-2,1 + 3,15}{2 \times (-0,525)} = \frac{1,05}{-1,05} = -1 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-2,1 - 3,15}{-1,05} = \frac{-5,25}{-1,05} = 5.$$

La solution $t_1 = -1$ est négative : elle ne convient pas.

Le ballon retombe au sol 5 secondes après le début de la passe.

$$\text{Vérification : } h(5) = -0,525 \times 25 + 2,1 \times 5 + 2,625 = -13,125 + 10,5 + 2,625 = 0.$$

Exercice 5

Bonus

Comme $m \neq 0$, l'équation $mx^2 + (m-1)x - 1 = 0$ est bien du second degré, avec $a = m$, $b = m-1$ et $c = -1$. Elle admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul.

$$\begin{aligned} \Delta &= (m-1)^2 - 4 \times m \times (-1) \\ &= m^2 - 2m + 1 + 4m \\ &= m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2. \end{aligned}$$

Donc $\Delta = 0 \iff (m+1)^2 = 0 \iff m = -1$, valeur bien non nulle.

$$m = -1$$

Vérification : pour $m = -1$, l'équation devient $-x^2 - 2x - 1 = 0$, soit $-(x+1)^2 = 0$: son unique solution est $x = -1$.