

## Exercice 1

6 points

- 1) Pour  $n \geq 1$ ,  $n - 1$  est un entier naturel et on remplace  $n$  par  $n - 1$  dans l'expression de  $u_n$  :

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= 1 - 2(n-1) - (n-1)^2 \\ &= 1 - 2n + 2 - (n^2 - 2n + 1) \\ &= 1 - 2n + 2 - n^2 + 2n - 1 \\ &= -n^2 + 2. \end{aligned}$$

Vérification : pour  $n = 1$ ,  $u_0 = 1$  et  $-1^2 + 2 = 1$ .

L'affirmation 1 est vraie.

- 2)  $v_1 = g(v_0) = 7 \times (-2) - 1 = -15$ . Ainsi  $v_1 < v_0$  : la suite  $(v_n)$  n'est pas croissante.  
(On peut aller plus loin :  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $v_1 < v_0$ , donc par récurrence  $v_{n+1} < v_n$  pour tout  $n$  : la suite est décroissante;  $v_2 = -106$ ,  $v_3 = -743$ .)

L'affirmation 2 est fausse.

- 3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-n - 1 = -(n + 1) \neq 0$  et :

$$w_n - 4 = \frac{n-3}{-n-1} - 4 = \frac{n-3-4(-n-1)}{-n-1} = \frac{5n+1}{-(n+1)} = -\frac{5n+1}{n+1}.$$

Or  $5n + 1 > 0$  et  $n + 1 > 0$ , donc  $w_n - 4 < 0$ , c'est-à-dire  $w_n < 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Remarque :  $w_n = \frac{3-n}{n+1}$  ; les premiers termes sont  $w_0 = 3$ ,  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = \frac{1}{3}$ ,  $w_3 = 0$  ; la suite est même majorée par 3.

L'affirmation 3 est vraie.

- 4) On remonte la relation de récurrence :

$$t_2 = 2t_1 - 4 \iff 8 = 2t_1 - 4 \iff 2t_1 = 12 \iff t_1 = 6,$$

$$t_1 = 2t_0 - 4 \iff 6 = 2t_0 - 4 \iff 2t_0 = 10 \iff t_0 = 5.$$

Donc  $t_0 = 5 \neq 10$  (avec  $t_0 = 10$ , on obtiendrait  $t_1 = 16$  et  $t_2 = 28$ ).

L'affirmation 4 est fausse.

- 5) Majorée par 0.  $x_0 = -3 \leq 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n^2 \geq 0$  donc  $x_{n+1} = -3 - 2x_n^2 \leq -3 < 0$ . Tous les termes sont donc négatifs :  $(x_n)$  est majorée par 0.

Décroissante. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$x_{n+1} - x_n = -3 - 2x_n^2 - x_n = -(2x_n^2 + x_n + 3).$$

Le trinôme  $2X^2 + X + 3$  a pour discriminant  $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23 < 0$  : il est toujours du signe de 2 > 0. Donc  $x_{n+1} - x_n < 0$  pour tout  $n$  et la suite est décroissante.

Vérification :  $x_0 = -3$ ,  $x_1 = -21$ ,  $x_2 = -885$ .

L'affirmation 5 est vraie.

## Exercice 2

3 points

- 1) À la calculatrice :  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0,75$ ,  $a_2 = \frac{18}{19} \approx 0,947$ ,  $a_3 = \frac{93}{94} \approx 0,989$ ,  $a_4 \approx 0,998$ .

On conjecture que la suite  $(a_n)$  est croissante (et que ses termes restent inférieurs à 1).

- 2)  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u(x) = 2x + 3$ ,  $u'(x) = 2$ ,  $v(x) = x + 4$ ,  $v'(x) = 1$ , et  $v(x) > 0$  sur  $[0; 1]$ .  
Pour tout  $x \in [0; 1]$  :

$$f'(x) = \frac{2(x+4) - (2x+3) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x-3}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2}.$$

Comme  $5 > 0$  et  $(x+4)^2 > 0$ ,  $f'(x) > 0$  : la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ .

Valeurs utiles :  $f(0) = \frac{3}{4}$  et  $f(1) = \frac{5}{5} = 1$ .

- 3) a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P(n)$  la proposition :

$$P(n) : \quad 0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 1.$$

(«  $a_n \leq a_{n+1}$  » traduit la croissance, «  $0 \leq a_n$  » la minoration et «  $a_{n+1} \leq 1$  » la majoration.)

- b. **Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(n)$  est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} &0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 1 \\ \implies &f(0) \leq f(a_n) \leq f(a_{n+1}) \leq f(1) \quad (f \text{ est croissante sur } [0; 1]) \\ \iff &\frac{3}{4} \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 1 \quad (\text{car } f(a_n) = a_{n+1} \text{ et } f(a_{n+1}) = a_{n+2}) \\ \implies &0 \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 1 \quad (\text{car } 0 \leq \frac{3}{4}). \end{aligned}$$

$P(n+1)$  est donc vraie : la proposition est héréditaire.

**Conclusion** (avec l'initialisation admise :  $0 \leq a_0 = 0 \leq a_1 = 0,75 \leq 1$ ). Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : la suite  $(a_n)$  est croissante, minorée par 0 et majorée par 1.

### Exercice 3

9 points

1)  $u_n$  représente la **masse de bactéries, en grammes**, présente dans la cuve au bout de  $n$  jours (juste après le remplacement quotidien du milieu nutritif).

- $u_0 = 1\,000$  : on introduit initialement 1 kg, c'est-à-dire 1 000 g de bactéries.
- En un jour, la masse augmente de 20 % : elle est multipliée par  $1 + \frac{20}{100} = 1,2$  et passe de  $u_n$  à  $1,2 u_n$ .
- Lors du remplacement du milieu, 100 g sont perdus : on retranche 100.

D'où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1,2 u_n - 100$ .

**Attention aux unités** : les masses sont en grammes, donc l'objectif de 30 kg correspond à  $u_n > 30\,000$ .

2) a. À la calculatrice (mode suite ou tableau de valeurs) :  $u_1 = 1\,100$ ,  $u_2 = 1\,220$ ,  $u_3 = 1\,364$ , ...

$$u_{22} \approx 28\,103 \leq 30\,000 \quad \text{et} \quad u_{23} \approx 33\,624 > 30\,000.$$

La masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de **23 jours**.

b. On répète le calcul du terme suivant tant que l'objectif n'est pas atteint, puis on renvoie le nombre de jours :

```

1 def seuil():
2     u = 1000
3     n = 0
4     while u <= 30000:
5         u = 1.2*u - 100
6         n = n + 1
7     return n

```

L'exécution de `seuil()` renvoie bien 23.

**Remarques** : la condition s'écrit en grammes (30 000 et non 30); c'est  $n$  qu'on renvoie, pas  $u$ . La condition  $u < 30\,000$  est aussi acceptée :  $u_n$  ne prend jamais exactement la valeur 30 000, et le résultat est le même.

3) a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P(n)$  la propriété : «  $u_n \geq 1\,000$  ».

**Initialisation.**  $u_0 = 1\,000 \geq 1\,000$  :  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(n)$  est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
 &u_n \geq 1\,000 \\
 \iff &1,2 u_n \geq 1\,200 && \text{(on multiplie par } 1,2 > 0 \text{)} \\
 \iff &1,2 u_n - 100 \geq 1\,100 && \text{(on retranche 100)} \\
 \iff &u_{n+1} \geq 1\,100 \\
 \implies &u_{n+1} \geq 1\,000 && \text{(car } 1\,100 \geq 1\,000 \text{)}.
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$  est vraie : la propriété est héréditaire.

**Conclusion.**  $P(0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire, donc par récurrence :

$$u_n \geq 1\,000 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} - u_n = 1,2 u_n - 100 - u_n = \boxed{0,2 u_n - 100}.$$

D'après la question a.,  $u_n \geq 1\,000$ , donc  $0,2 u_n \geq 200$  et  $u_{n+1} - u_n \geq 200 - 100 = 100 > 0$ .  
La suite  $(u_n)$  est donc **strictement croissante**.

c. La masse de bactéries dans la cuve ne descend jamais en dessous de la masse initiale de 1 kg, et elle augmente chaque jour (d'au moins 100 g par jour, d'après le calcul précédent).

4) a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2 u_n - 100 - 500 = 1,2 u_n - 600 = 1,2 (u_n - 500) = 1,2 v_n.$$

La suite  $(v_n)$  est donc **géométrique de raison  $q = 1,2$** , de premier terme  $v_0 = u_0 - 500 = 1\,000 - 500 = \boxed{500}$ .

b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 \times q^n$ , soit  **$v_n = 500 \times 1,2^n$** .

Comme  $v_n = u_n - 500$ , on a  $u_n = v_n + 500$ , soit  **$u_n = 500 \times 1,2^n + 500$** .

Vérification :  $u_0 = 500 + 500 = 1\,000$ ;  $u_1 = 600 + 500 = 1\,100$ ;  $u_2 = 720 + 500 = 1\,220$ .

c. L'objectif est atteint lorsque la masse dépasse 30 kg, soit 30 000 g :

$$u_n > 30\,000 \iff 500 \times 1,2^n + 500 > 30\,000 \iff 500 \times 1,2^n > 29\,500 \iff \boxed{1,2^n > 59}.$$

Vérification :  $1,2^{22} \approx 55,2 < 59$  et  $1,2^{23} \approx 66,2 > 59$  : le plus petit entier solution est  $n = 23$ , comme à la question 2).

## Exercice 4

2 points

1)  $a_0 = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 0 - 5 = 4 - 5 = \boxed{-1}.$

$$a_1 = 4 \times \frac{2}{3} + 1 - 5 = \frac{8}{3} - 4 = \frac{8}{3} - \frac{12}{3} = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

2) On sépare la somme en deux :

$$S_{20} = \sum_{k=0}^{20} a_k = 4 \underbrace{\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right]}_A + \underbrace{\sum_{k=0}^{20} (k-5)}_B.$$

Calcul de A. Somme des 21 premiers termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3} \neq 1$  :

$$A = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{21}}{1 - \frac{2}{3}} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{21}}{\frac{1}{3}} = 12 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{21}\right].$$

*Calcul de B.*  $B = (0 + 1 + \dots + 20) - 21 \times 5 = \frac{20 \times 21}{2} - 105 = 210 - 105 = 105.$

Finalemment :

$$S_{20} = 12 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{21} \right] + 105.$$

*Vérification :*  $S_{20} \approx 116,998$ , valeur que l'on retrouve en additionnant les 21 termes à la calculatrice.