

Calculatrice autorisée

Exercice 1

6 points

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier vos réponses.
Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

- 1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 1 - 2n - n^2$.
Affirmation 1 : Pour $n \geq 1$, $u_{n-1} = -n^2 + 2$.
- 2) Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n , par $v_{n+1} = g(v_n)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7x - 1$.
Affirmation 2 : La suite (v_n) est croissante.
- 3) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{n-3}{-n-1}$.
Affirmation 3 : La suite (w_n) est majorée par 4.
- 4) On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_{n+1} = 2t_n - 4$ et $t_2 = 8$.
Affirmation 4 : $t_0 = 10$.
- 5) Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n , $x_{n+1} = -3 - 2x_n^2$.
Affirmation 5 : La suite (x_n) est décroissante et majorée par 0.

Exercice 2

3 points

Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{a_n + 4}$.

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}$.

- 1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (a_n) .
- 2) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0; 1]$.
- 3) On veut démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la suite (a_n) est croissante, minorée par 0 et majorée par 1.
 - a. Quelle proposition faut-il démontrer ?
 - b. On admet que l'initialisation est vérifiée pour l'entier $n = 0$. Rédiger uniquement la partie hérédité de cette démonstration.

Exercice 3

9 points

Une société produit des bactéries pour l'industrie.

En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe comme objectif de produire 30 kg de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 1,2 u_n - 100.$$

1) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n .

2) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

a. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

b. On peut utiliser un algorithme pour répondre à cette question.

Compléter l'algorithme écrit en Python ci-contre.

```
1 def seuil():
2     u = 1000
3     n = 0
4     while u .....:
5         u = .....
6         n = n + 1
7     return .....
```

3) a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1\,000$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,2 u_n - 100$. En déduire le sens de variation de (u_n) .

c. Donner une interprétation, dans le contexte de l'exercice, des deux résultats démontrés précédemment.

4) On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 500$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$. Préciser son premier terme.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c. Écrire l'inéquation, en fonction de n , qui permettrait de déterminer le jour où l'objectif sera atteint.

Exercice 4

2 points

On considère la suite (a_n) définie, pour tout entier naturel n , par $a_n = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n - 5$.

1) Calculer les valeurs exactes de a_0 puis a_1 .

2) La suite (S_n) est définie, pour tout entier naturel n , par : $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Montrer que la valeur exacte de S_{20} est : $S_{20} = 12 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{21} \right] + 105$.