

Exercice 1

9 points

1) **Forme algébrique de z_1 .** Le conjugué de $5i - 4 = -4 + 5i$ est $-4 - 5i$. Donc

$$z_1 = -i \times (-4 - 5i) = 4i + 5i^2 = 4i - 5, \quad \boxed{z_1 = -5 + 4i}$$

Forme algébrique de z_2 . On calcule d'abord $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$. Donc

$$z_2 = (1 - i)^2(1 - i) = -2i(1 - i) = -2i + 2i^2 = -2i - 2, \quad \boxed{z_2 = -2 - 2i}$$

Forme algébrique de z_3 . On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, $2 + 4i$:

$$z_3 = \frac{(2i - 1)(2 + 4i)}{(2 - 4i)(2 + 4i)} = \frac{4i + 8i^2 - 2 - 4i}{2^2 + 4^2} = \frac{-10}{20}, \quad \boxed{z_3 = -\frac{1}{2}}$$

Vérification : $-\frac{1}{2}(2 - 4i) = -1 + 2i = 2i - 1$. Le nombre z_3 est réel (sa partie imaginaire est nulle).

2) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, avec x et y réels. Alors $\bar{z} = x - iy$.

Numérateur. $z^2 - \bar{z}^2 = (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = (2iy)(2x) = 4xyi$.

Dénominateur. $z\bar{z} + 3 = x^2 + y^2 + 3$: c'est un réel, et il est strictement positif (au moins égal à 3), donc non nul ; le quotient est bien défini.

Par conséquent

$$\frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z} + 3} = \frac{4xy}{x^2 + y^2 + 3} i \quad \text{avec} \quad \frac{4xy}{x^2 + y^2 + 3} \in \mathbb{R}.$$

Sa partie réelle est nulle : le quotient est un imaginaire pur.

Remarque : lorsque z est réel ($y = 0$) ou imaginaire pur ($x = 0$), le quotient vaut 0. Le nombre 0 est à la fois réel et imaginaire pur (sa partie réelle est nulle), donc la conclusion reste vraie dans ce cas.

3) **Méthode 1 (conjugué).** Comme $\overline{1 + i} = 1 - i$ et que le conjugué d'une puissance est la puissance du conjugué, $(1 - i)^{17} = \overline{(1 + i)^{17}}$. En posant $w = (1 + i)^{17}$, le nombre étudié vaut

$$w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w) \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2 (calcul). $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, donc $(1 + i)^{16} = (2i)^8 = 2^8 i^8 = 256$ et $(1 + i)^{17} = 256(1 + i) = 256 + 256i$.

De même $(1 - i)^2 = -2i$, donc $(1 - i)^{16} = (-2i)^8 = 256$ et $(1 - i)^{17} = 256 - 256i$. Ainsi

$$(1 + i)^{17} + (1 - i)^{17} = 256 + 256i + 256 - 256i = 512, \quad \boxed{(1 + i)^{17} + (1 - i)^{17} = 512 \in \mathbb{R}}$$

Exercice 2

8 points

1) On développe le membre de gauche : $(1 + 2i)(z - 3i) = z + 2iz - 3i - 6i^2 = z + 2iz + 6 - 3i$.

$$\begin{aligned}(1 + 2i)(z - 3i) = z + 2 + 3i &\iff z + 2iz + 6 - 3i = z + 2 + 3i \\ &\iff 2iz = -4 + 6i \\ &\iff z = \frac{-4 + 6i}{2i} = \frac{(-4 + 6i)(-i)}{2i \times (-i)} = \frac{4i + 6}{2} = 3 + 2i\end{aligned}$$

$$S = \{3 + 2i\}$$

Vérification : $(1 + 2i)(3 - i) = 3 - i + 6i + 2 = 5 + 5i$ et $(3 + 2i) + 2 + 3i = 5 + 5i$.

2) $-49 = (7i)^2$, donc $z^2 = -49 \iff z^2 - (7i)^2 = 0 \iff (z - 7i)(z + 7i) = 0 \iff z = 7i$ ou $z = -7i$.

$$S = \{-7i; 7i\}$$

3) $2z^2 + 1 = -2z \iff 2z^2 + 2z + 1 = 0$. Discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$, et $-4 = (2i)^2$.
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z = \frac{-2 - 2i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad z = \frac{-2 + 2i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

4) On pose $z = x + iy$ avec x, y réels; alors $\bar{z} = x - iy$ et $iz = ix + i^2y = -y + ix$.

$$3\bar{z} + 2 - i = iz + 2 \iff 3x - 3iy + 2 - i = -y + ix + 2 \iff (3x + y) + i(-x - 3y - 1) = 0$$

Un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles :

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ x - 9x + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ y = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{8} - \frac{3}{8}i \right\}$$

Vérification : $3\bar{z} + 2 - i = \frac{3}{8} + \frac{9}{8}i + 2 - i = \frac{19}{8} + \frac{1}{8}i$ et $iz + 2 = \frac{1}{8}i + \frac{3}{8} + 2 = \frac{19}{8} + \frac{1}{8}i$.

5) **Condition.** Le quotient existe si et seulement si $\bar{z} - i \neq 0$, c'est-à-dire $\bar{z} \neq i$, soit $z \neq -i$ (en passant au conjugué) : c'est la condition de l'énoncé.

Pour $z \neq -i$, on pose $z = x + iy$ avec x, y réels :

$$\begin{aligned}\frac{z + 2i}{\bar{z} - i} = 2 &\iff z + 2i = 2(\bar{z} - i) \\ &\iff x + iy + 2i = 2x - 2iy - 2i \\ &\iff -x + i(3y + 4) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

On trouve $z = -\frac{4}{3}i$, qui est bien différent de $-i$: la solution est valable.

$$S = \left\{ -\frac{4}{3}i \right\}$$

Vérification : $\bar{z} - i = \frac{4}{3}i - i = \frac{1}{3}i \neq 0$ et $z + 2i = \frac{2}{3}i = 2 \times \frac{1}{3}i$.

6) On pose $z = x + iy$ avec x, y réels : $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ et $2\bar{z} = 2x - 2iy$, donc

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = (x^2 - y^2 - 2x + 1) + i(2xy + 2y).$$

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \iff \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2y(x + 1) = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $y = 0$ ou $x = -1$.

- Si $y = 0$: $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$. D'où $z = 1$.
- Si $x = -1$: $1 - y^2 + 2 + 1 = 0 \iff y^2 = 4 \iff y = 2$ ou $y = -2$. D'où $z = -1 + 2i$ ou $z = -1 - 2i$.

$$S = \{1; -1 + 2i; -1 - 2i\}$$

Vérification pour $z = -1 + 2i$: $z^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$, $2\bar{z} = -2 - 4i$, donc $z^2 - 2\bar{z} + 1 = -3 - 4i + 2 + 4i + 1 = 0$; pour $z = 1$: $1 - 2 + 1 = 0$.

Exercice 3

3 points

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = z_{n+1} - i = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i - i = \frac{1}{3}z_n - \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}(z_n - i), \quad \boxed{u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n}$$

La suite (u_n) est donc **géométrique de raison** $q = \frac{1}{3}$, de premier terme $u_0 = z_0 - i = \boxed{1 - i}$.

2) D'après le cours sur les suites géométriques, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$:

$$\boxed{u_n = (1 - i) \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1 - i}{3^n}}$$

Comme $z_n = u_n + i$:

$$\boxed{z_n = \frac{1 - i}{3^n} + i = \frac{1}{3^n} + \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)i}$$

Vérification : $n = 0$ donne $z_0 = 1 + 0 \times i = 1$; $n = 1$ donne $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$, et la relation de récurrence donne bien $\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3}i$; $n = 2$ donne $\frac{1}{9} + \frac{8}{9}i = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right) + \frac{2}{3}i$.