

Calculatrice interdite

Exercice 1

9 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Déterminer la forme algébrique des trois nombres suivants :

$$z_1 = -i \times \overline{(5i - 4)} \quad ; \quad z_2 = (1 - i)^3 \quad ; \quad z_3 = \frac{2i - 1}{2 - 4i}$$

2) Montrer que si z est un nombre complexe non nul alors $\frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z} + 3}$ est un imaginaire pur.

3) Montrer que le nombre $(1 + i)^{17} + (1 - i)^{17}$ est un nombre réel.

Exercice 2

8 points

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1) $(1 + 2i)(z - 3i) = z + 2 + 3i$

4) $3\bar{z} + 2 - i = iz + 2$

2) $z^2 = -49$

5) $\frac{z + 2i}{\bar{z} - i} = 2$ (avec $z \neq -i$)

3) $2z^2 + 1 = -2z$

6) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$

Exercice 3

3 points

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i \end{cases}$$

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - i$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de (u_n) .

2) Déterminer u_n puis z_n en fonction de n .