

## Exercice 1

4 points

- a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ , donc par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + \sqrt{n}) = +\infty.$$

- b. Forme indéterminée «  $\frac{\infty}{\infty}$  » : on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur. Pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1} = \frac{n^4 \left( \frac{1}{n^4} - 6 \right)}{n^6 \left( 5 + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^6} \right)} = \frac{1}{n^2} \times \frac{\frac{1}{n^4} - 6}{5 + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^6}}.$$

Or  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{n^4} - 6 \rightarrow -6$  et  $5 + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^6} \rightarrow 5$ . Par produit et quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1} = 0.$$

- c. Forme indéterminée au dénominateur («  $\infty - \infty$  ») : on multiplie par la quantité conjuguée. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n+2})^2} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{(n+1) - (n+2)} = -(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}).$$

Comme  $\sqrt{n+1} \rightarrow +\infty$  et  $\sqrt{n+2} \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}} = -\infty.$$

## Exercice 2

6 points

- 1) On factorise par les termes dominants  $5^n$  et  $3^n$  :

$$u_n = \frac{5^n \left( \frac{1}{5^n} + 1 \right)}{3^n \left( \frac{2}{3^n} + 1 \right)} = \left( \frac{5}{3} \right)^n \times \frac{\left( \frac{1}{5} \right)^n + 1}{2 \left( \frac{1}{3} \right)^n + 1}.$$

Comme  $\frac{5}{3} > 1$ ,  $\left( \frac{5}{3} \right)^n \rightarrow +\infty$  ; comme  $0 < \frac{1}{5} < 1$  et  $0 < \frac{1}{3} < 1$ , la fraction tend vers  $\frac{0+1}{0+1} = 1$ .  
Par produit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  : la suite diverge.

**Affirmation 1 :** fausse.

- 2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P(n)$  : «  $w_n \geq n$  ».

**Initialisation.**  $w_0 = 0 \geq 0$  :  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(n)$  est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} w_n &\geq n \\ \iff 3w_n &\geq 3n && \text{(on multiplie par } 3 > 0) \\ \iff 3w_n - 2n + 3 &\geq n + 3 && \text{(on ajoute } -2n + 3) \\ \iff w_{n+1} &\geq n + 3 && \text{(définition de } w_{n+1}) \\ \implies w_{n+1} &\geq n + 1 && \text{(car } n + 3 \geq n + 1) \end{aligned}$$

$P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n \geq n$ . **Affirmation 2 :** vraie.

Vérification :  $w_0 = 0$ ,  $w_1 = 3$ ,  $w_2 = 10$ ,  $w_3 = 29$ ,  $w_4 = 84$ .

3) Comme  $0 \leq x < 1$ , on a  $x - 1 < 0$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ , donc par produit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^n = -\infty$ .

Pour tout  $n$ ,  $\cos(n) \leq 1$ , donc  $u_n \leq (x - 1)e^n + 1$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(x - 1)e^n + 1] = -\infty$ .

Par comparaison,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ . **Affirmation 3 :** vraie.

4) Une fonction convexe sur un intervalle a sa courbe *au-dessus* de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.

Or, sur la figure, au voisinage du point  $A$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située *en dessous* de la tangente  $T$ , à gauche comme à droite de  $A$  (on le voit nettement vers  $x = 3$  et vers  $x = 12$ ). La fonction  $f$  n'est donc pas convexe sur  $]0; +\infty[$  (elle est concave au voisinage de 8, alors qu'elle est convexe au voisinage de 1, où la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, sa tangente).

**Affirmation 4 :** fausse.

## Exercice 3

8 points

### Partie A : Étude générale

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P(n)$  : «  $u_n > 0$  ».

**Initialisation.**  $u_0 = 1 > 0$  :  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(n)$  est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &> 0 \\ \iff u_n + 8 &> 8 && \text{(on ajoute 8)} \\ \implies \frac{u_n}{u_n + 8} &> 0 && \text{(quotient de deux nombres strictement positifs)} \\ \iff u_{n+1} &> 0 && \text{(définition de } u_{n+1}) \end{aligned}$$

$P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence,  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n + 8} - u_n = \frac{u_n - u_n(u_n + 8)}{u_n + 8} = \frac{-u_n^2 - 7u_n}{u_n + 8} = \frac{-u_n(u_n + 7)}{u_n + 8}.$$

D'après la question 1,  $u_n > 0$ , donc  $u_n + 7 > 0$  et  $u_n + 8 > 0 : u_{n+1} - u_n < 0$ .

La suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

Vérification :  $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{9}, u_2 = \frac{1}{73}$ .

- 3) La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0 (question 1). D'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.

### Partie B : Recherche d'une expression du terme général

La suite  $(v_n)$  est bien définie car  $u_n \neq 0$  pour tout  $n$  (Partie A, question 1).

- 1) a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_{n+1} = 1 + \frac{7}{u_{n+1}} = 1 + 7 \times \frac{u_n + 8}{u_n} = 1 + \frac{7u_n + 56}{u_n} = 1 + 7 + \frac{56}{u_n} = 8 + \frac{56}{u_n} = 8 \left( 1 + \frac{7}{u_n} \right) = 8 v_n.$$

La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 8 et de premier terme  $v_0 = 1 + \frac{7}{u_0} = 1 + 7$ , soit

$$\boxed{v_0 = 8}.$$

- b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 \times 8^n = 8 \times 8^n$ , soit  $v_n = 8^{n+1}$ .

- 2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n} \iff \frac{7}{u_n} = v_n - 1 \iff u_n = \frac{7}{v_n - 1},$$

ce qui est possible car  $v_n - 1 = 8^{n+1} - 1 \geq 7 > 0$ . Donc

$$\boxed{u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}}.$$

Vérification :  $u_0 = \frac{7}{8-1} = 1, u_1 = \frac{7}{63} = \frac{1}{9}, u_2 = \frac{7}{511} = \frac{1}{73}$ .

- 3) Comme  $8 > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^{n+1} = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (8^{n+1} - 1) = +\infty$  et, par quotient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

### Exercice 4

5 points

- 1)  $g = u \times e^w$  avec  $u(x) = 6 - x^2, u'(x) = -2x, w(x) = -2x, w'(x) = -2$ . Comme  $(uv)' = u'v + uv'$  et  $(e^w)' = w'e^w$  :

$$g'(x) = -2x e^{-2x} + (6 - x^2) \times (-2) e^{-2x} = (-2x - 12 + 2x^2) e^{-2x},$$

$$\text{soit } \boxed{g'(x) = (2x^2 - 2x - 12) e^{-2x}}.$$

- 2) Pour tout  $x, e^{-2x} > 0 : g'(x)$  a le signe de  $2x^2 - 2x - 12 = 2(x^2 - x - 6)$ .

Discriminant de  $x^2 - x - 6$  :  $\Delta = 1 + 24 = 25$ , racines  $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$  et  $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$ , toutes deux dans  $[-5; 5]$ . Le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

Valeurs :  $g(-5) = -19e^{10} \approx -418\,502,850$ ;  $g(-2) = 2e^4 \approx 109,196$ ;  $g(3) = -3e^{-6} \approx -0,007$ ;  $g(5) = -19e^{-10} \approx -0,001$ .

| $x$     | -5                                                                                                                                                                                                                                                                             | -2 | 3 | 5 |   |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---|---|---|
| $g'(x)$ | +                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0  | - | 0 | + |
| $g$     | <div><div><div><math>-19e^{10}</math></div><div><math>2e^4</math></div><div><math>-3e^{-6}</math></div><div><math>-19e^{-10}</math></div></div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div></div></div></div> |    |   |   |   |

$g$  est croissante sur  $[-5; -2]$ , décroissante sur  $[-2; 3]$  et croissante sur  $[3; 5]$ .

- maximum  $\boxed{g(-2) = 2e^4 \approx 109,196}$  atteint en  $-2$  (maximum sur  $D_g$ , car  $g(5) < 0$ );
- minimum local  $\boxed{g(3) = -3e^{-6} \approx -0,007}$  atteint en  $3$ ;
- minimum sur  $D_g$  :  $\boxed{g(-5) = -19e^{10} \approx -418\,502,850}$  atteint en  $-5$  (borne);
- maximum local en  $5$  (borne) :  $g(5) = -19e^{-10} \approx -0,001$ .

3) On dérive  $g'$ , toujours de la forme  $u \times e^w$  avec  $u(x) = 2x^2 - 2x - 12$ ,  $u'(x) = 4x - 2$  :

$$g''(x) = (4x - 2)e^{-2x} + (2x^2 - 2x - 12)(-2)e^{-2x} = (-4x^2 + 8x + 22)e^{-2x}.$$

$g''(x)$  a le signe de  $-4x^2 + 8x + 22 = -2(2x^2 - 4x - 11)$ .

Discriminant de  $2x^2 - 4x - 11$  :  $\Delta = 16 + 88 = 104$ , racines

$$\alpha = \frac{4 - \sqrt{104}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{26}}{2} \approx -1,550 \quad \text{et} \quad \beta = 1 + \frac{\sqrt{26}}{2} \approx 3,550,$$

toutes deux dans  $[-5; 5]$ . Le trinôme  $-4x^2 + 8x + 22$  (coefficient  $-4 < 0$ ) est positif entre ses racines.

| $x$      | -5 | $\alpha$ | $\beta$ | 5 |   |
|----------|----|----------|---------|---|---|
| $g''(x)$ | -  | 0        | +       | 0 | - |

Donc, avec  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}$  et  $\beta = 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}$  :

$\boxed{g \text{ est concave sur } [-5; \alpha] \text{ et sur } [\beta; 5], \text{ convexe sur } [\alpha; \beta]}.$

$g''$  s'annule en changeant de signe en  $\alpha$  et en  $\beta$  :  $\mathcal{C}_g$  admet deux points d'inflexion, d'abscisses  $\alpha$  et  $\beta$ .

4)  $T_1 : y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ , avec  $g(1) = 5e^{-2}$  et  $g'(1) = (2 - 2 - 12)e^{-2} = -12e^{-2}$  :

$$y = -12e^{-2}(x - 1) + 5e^{-2} = -12e^{-2}x + 12e^{-2} + 5e^{-2},$$

soit  $T_1 : y = -12e^{-2}x + 17e^{-2}$  (environ  $y = -1,624x + 2,301$ ).

5)  $\alpha \approx -1,550 < -1$  et  $3 < \beta \approx 3,550$ , donc  $[-1; 3] \subset [\alpha; \beta]$  : d'après la question 3,  $g$  est convexe sur  $[-1; 3]$ .

Une fonction convexe sur un intervalle a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle. Le point  $A$  d'abscisse 1 appartient à  $[-1; 3]$ , donc :

sur  $[-1; 3]$ ,  $\mathcal{C}_g$  est au-dessus de  $T_1$  (elles se touchent en  $A$ ).

## Exercice 5

2 points

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $P(n) : \ll S_n = \frac{n}{2(n+2)} \gg$ .

**Initialisation.**  $S_1 = \frac{1}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$  et  $\frac{1}{2(1+2)} = \frac{1}{6}$  :  $P(1)$  est vraie.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $P(n)$  est vraie. On remarque que  $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ . Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2(n+2)} \\ \iff S_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)} &= \frac{n}{2(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} && \text{(on ajoute } \frac{1}{(n+2)(n+3)} \text{)} \\ \iff S_{n+1} &= \frac{n(n+3) + 2}{2(n+2)(n+3)} && \text{(même dénominateur)} \\ \iff S_{n+1} &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)(n+3)} && \text{(car } (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 \text{)} \\ \iff S_{n+1} &= \frac{n+1}{2((n+1)+2)} && \text{(on simplifie par } n+2 \neq 0 \text{)} \end{aligned}$$

$P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence :

$$S_n = \frac{n}{2(n+2)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Vérification :  $S_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$  et  $\frac{2}{2 \times 4} = \frac{1}{4}$ .