

Calculatrice autorisée

Toutes les réponses doivent être justifiées et clairement rédigées.

Exercice 1

4 points

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + \sqrt{n})$ b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1}$ c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}$

Exercice 2

6 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1) La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}$.

Affirmation 1 : la suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

- 2) On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$.

Affirmation 2 : pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$.

- 3) Soit x un réel donné dans $[0 ; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = (x - 1)e^n + \cos(n).$$

Affirmation 3 : la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

- 4) On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée dans un repère orthonormé sur la figure ci-contre (Fig. 1). On précise que :

- T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 8 ;
- l'axe des abscisses est la tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Affirmation 4 : d'après le graphique, la fonction f est convexe sur son ensemble de définition.

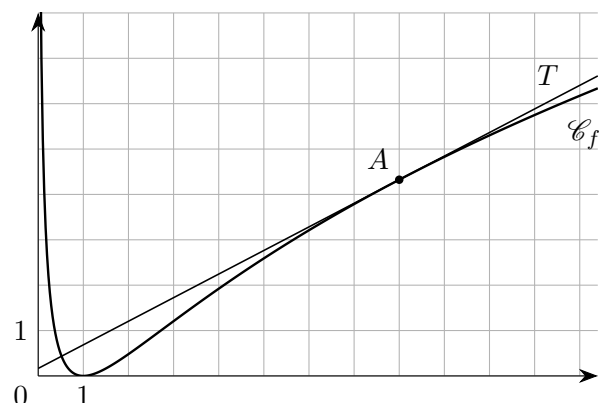


Fig. 1

Exercice 3

8 points

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Étude générale

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- 2) Étudier les variations de la suite (u_n) .
- 3) La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier.

Partie B : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n ,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

- 1)
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
 - b. En déduire une expression de v_n en fonction de n .
- 2) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}$.
- 3) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4

5 points

La fonction g est définie sur $D_g = [-5; 5]$ par $g(x) = (6 - x^2)e^{-2x}$.

On admet que la fonction g est deux fois dérivable sur $[-5; 5]$.

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

- 1) Prouver que, pour tout $x \in D_g$, $g'(x) = (2x^2 - 2x - 12)e^{-2x}$.
- 2) Étudier les variations de la fonction g sur D_g et dresser son tableau de variations.
Préciser les valeurs des extremums, en arrondissant les valeurs au millièème si nécessaire.
- 3) Étudier la convexité de g sur D_g .
- 4) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A d'abscisse 1.
- 5) Déduire des questions précédentes la position de T_1 par rapport à $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[-1; 3]$.

Exercice 5

2 points

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(1+1)(1+2)} + \frac{1}{(2+1)(2+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n}{2(n+2)}$.