

Exercice 1

7 points

- 1) a) Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par 0,75 ($6 = 0,75 \times 8$; $4,5 = 0,75 \times 6$; ...): les termes sont positifs, décroissent et les points du nuage se rapprochent de l'axe des abscisses ($u_{10} \approx 0,45$).

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Justification : (u_n) est la suite géométrique $u_n = 8 \times 0,75^n$ et $-1 < 0,75 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$.

- b) La suite est définie par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = 0,75u_n + 1$. Sur la construction en escalier, les termes avancent vers la droite et s'accumulent au point d'intersection des droites $y = 0,75x + 1$ et $y = x$, dont l'abscisse vérifie

$$0,75x + 1 = x \iff 0,25x = 1 \iff x = 4.$$

Le tableau le confirme : la suite croît (0,5; 1,375; ...; 3,8029) en restant inférieure à 4.

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

- c) La suite est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1,25u_n + 1$. L'escalier s'éloigne vers la droite et vers le haut : les deux droites ne se coupent pas pour $x \geq 0$ (elles se coupent en $x = -4$). Dans le tableau, les termes augmentent de plus en plus vite ($u_{10} \approx 33,25$).

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- d) Les termes oscillent autour de 5 : les termes de rang pair augmentent (6; 6,32; 6,75; 7,31; 8,06; 9,05), ceux de rang impair diminuent (3,85; 3,48; 2,99; 2,34; 1,48). L'écart entre deux termes consécutifs grandit : les termes ne se rapprochent d'aucun nombre.

On conjecture que la suite (u_n) n'a pas de limite (ni finie, ni infinie).

- 2) a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n - 2) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$. Par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n - 2 + e^n = +\infty.$$

- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5 - \sqrt{n}) = -\infty$.
Par produit (avec $3 > 0$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) (5 - \sqrt{n}) = -\infty.$$

- c) Numérateur : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 3\right) = -3$.

Dénominateur : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} + e^{-n}\right) = 0$, et ce dénominateur est strictement positif pour tout $n \geq 1$ (limite 0^+).

Par quotient (« -3 divisé par 0^+ ») :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 3}{\frac{2}{n} + e^{-n}} = -\infty.$$

3) a) Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour $n \geq 1$, on factorise par le terme de plus haut degré :

$$3n^2 - 2n + 1 = n^2 \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 3 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \text{ donc par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 - 2n + 1 = +\infty.$$

b) Forme indéterminée « $0 \times \infty$ ». On développe, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) (3n^2 + n + 1) &= 6n + 2 + \frac{2}{n} - 3 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\ &= 6n - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (6n - 1) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 0, \text{ donc par somme}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) (3n^2 + n + 1) = +\infty.$$

c) Forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $n \geq 1$, on factorise par n en haut et en bas :

$$\frac{3 - 8n}{2n + 1} = \frac{n \left(\frac{3}{n} - 8 \right)}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{\frac{3}{n} - 8}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Le numérateur tend vers -8 et le dénominateur vers 2 , donc par quotient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - 8n}{2n + 1} = -4.$$

4) a. Les termes diminuent par paliers de 4 tous les deux rangs ($1; -3; -3; -7; -7; \dots; -19$) et les points du nuage descendent sans fin.

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n$ vaut 1 ou -1 , donc $(-1)^n \leq 1$. En ajoutant $-2n$:

$$u_n = -2n + (-1)^n \leq -2n + 1.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n + 1) = -\infty$. Par comparaison (la suite (u_n) est majorée par une suite qui tend vers $-\infty$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

$$\text{Vérification : } u_{10} = -20 + 1 = -19 \leq -2 \times 10 + 1 = -19.$$

Exercice 2

5 points

- 1) a. Avec $n = 0$: $u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 0 - 3 = \boxed{12}$.
- b. Avec $n = 1$: $u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$.
- c. $u_0 = 3 < u_1 = 12 < u_2 = 53$: on conjecture que la suite (u_n) est croissante.
- 2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$ ».
- Initialisation.** $2 \times 5^0 + 0 + 1 = 2 + 1 = 3 = u_0$: $P(0)$ est vraie.
- Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \times 5^n + n + 1 \\ \iff 5u_n &= 2 \times 5^{n+1} + 5n + 5 && \text{(on multiplie par 5)} \\ \iff 5u_n - 4n - 3 &= 2 \times 5^{n+1} + 5n + 5 - 4n - 3 && \text{(on retranche } 4n + 3) \\ \iff u_{n+1} &= 2 \times 5^{n+1} + n + 2 \\ \iff u_{n+1} &= 2 \times 5^{n+1} + (n + 1) + 1. \end{aligned}$$

$P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Vérification : $u_1 = 10 + 2 = 12$ et $u_2 = 50 + 3 = 53$, conformes à la question 1).

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 5^{n+1} + n + 2 - (2 \times 5^n + n + 1) = 2 \times 5^n (5 - 1) + 1 = 8 \times 5^n + 1.$$

Or $5^n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

- 3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n > 0$ donc $2 \times 5^n > 0$, et :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1 \geq n + 1.$$

Ainsi $\boxed{u_n \geq n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

- b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$ et $u_n \geq n + 1$ pour tout n . Par comparaison :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

Exercice 3

8 points

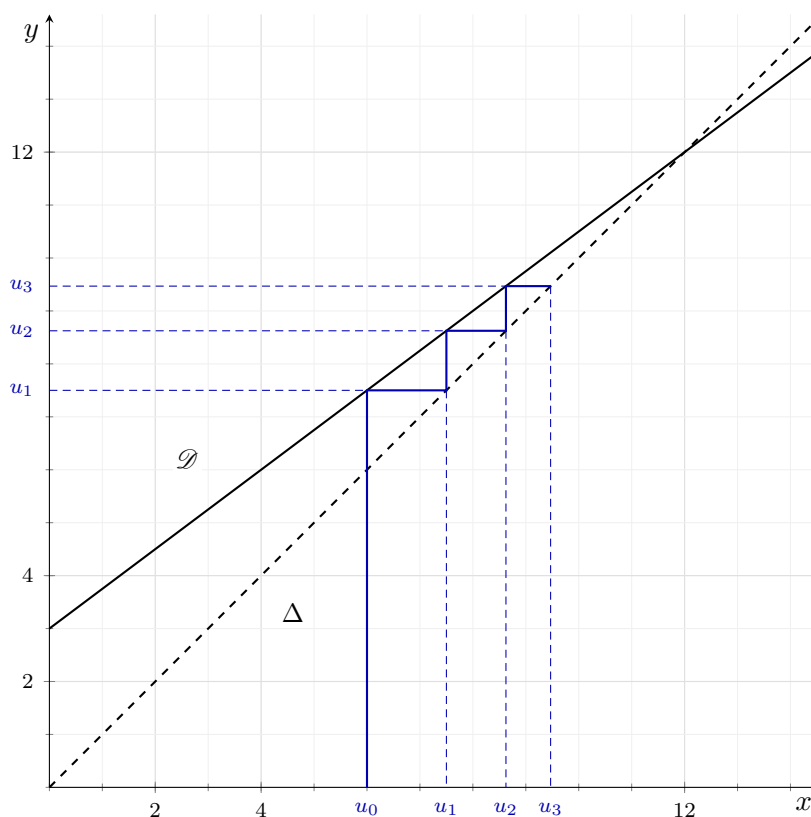
1) a. $u_1 = 0,75 \times 6 + 3 = 4,5 + 3 = \boxed{7,5}$.

Après 1 an, on estime le nombre d'oiseaux à $\boxed{7\,500}$.

b. D'une année à l'autre, 25 % des oiseaux disparaissent : il en reste $100\% - 25\% = 75\%$, soit $0,75 u_n$ milliers. Puis 3 000 oiseaux, soit 3 milliers, arrivent. Donc, pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{u_{n+1} = 0,75 u_n + 3}.$$

2) a. On place $u_0 = 6$ sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à $\mathcal{D}$: l'ordonnée obtenue est u_1 , que l'on reporte sur l'axe des abscisses grâce à Δ , et l'on recommence.



On lit $u_1 = 7,5$, $u_2 \approx 8,6$ et $u_3 \approx 9,5$ (valeurs exactes : $u_2 = 8,625$ et $u_3 = 9,46875$).

b. Les termes se déplacent vers la droite en se rapprochant du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ , d'abscisse 12 ($0,75x + 3 = x \iff 0,25x = 3 \iff x = 12$).

On conjecture que la suite (u_n) est croissante et que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12}$.

3) a. $v_0 = u_0 - 12 = 6 - 12 = \boxed{-6}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,75 u_n + 3 - 12 = 0,75 u_n - 9 = 0,75 (u_n - 12) = 0,75 v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,75$, de premier terme $v_0 = -6$.

c. Pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = v_0 \times q^n$, soit $v_n = -6 \times 0,75^n$.

d. Comme $v_n = u_n - 12$, on a $u_n = v_n + 12$, soit $u_n = -6 \times 0,75^n + 12$.

Vérification : $u_0 = -6 + 12 = 6$ et $u_1 = -4,5 + 12 = 7,5$.

4) Dix années après le début de l'étude correspond à $n = 10$:

$$u_{10} = -6 \times 0,75^{10} + 12 \approx 11,6621.$$

u_{10} est exprimé en milliers : selon ce modèle, il y aura environ 11 662 oiseaux dans la réserve.

5) Comme $-1 < 0,75 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$.

Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -6 \times 0,75^n = 0$, puis par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12.$$

À long terme, le nombre d'oiseaux de la réserve se stabilise autour de 12 000.

6) a. On part de $n = 0$ et $u = u_0 = 6$; tant que $u_n \leq 11,5$, on passe au rang suivant et on calcule le terme suivant.

```

1 def seuil():
2     n = 0
3     u = 6
4     while u <= 11.5:
5         n = n + 1
6         u = 0.75*u + 3
7     return n

```

La suite étant croissante et de limite $12 > 11,5$, la boucle s'arrête : la fonction renvoie bien le plus petit entier n tel que $u_n > 11,5$.

b. On calcule (à la calculatrice ou avec la forme explicite) :

$$u_8 = -6 \times 0,75^8 + 12 \approx 11,399 \leq 11,5 \quad \text{et} \quad u_9 = -6 \times 0,75^9 + 12 \approx 11,549 > 11,5.$$

L'instruction `seuil()` renvoie donc 9.

Interprétation : selon ce modèle, c'est à partir de la 9^e année après le début de l'étude que la réserve compte plus de 11 500 oiseaux.