

Calculatrice autorisée

Exercice 1

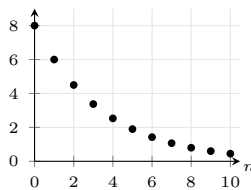
7 points

Les questions sont indépendantes.

- 1) Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite (u_n) à l'aide du tableau et du graphique (obtenus à la calculatrice) :

a)

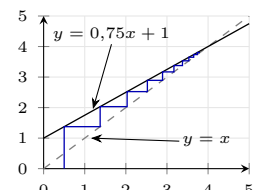
n	u_n
0	8
1	6
2	4,5
3	3,375
4	2,5313
5	1,8984
6	1,4238
7	1,0679
8	0,8009
9	0,6007
10	0,4505



b)

$$u_0 = 0,5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,75 u_n + 1$$

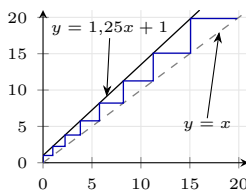
n	u_n
0	0,5
1	1,375
2	2,0313
3	2,5234
4	2,8926
5	3,1694
6	3,3771
7	3,5328
8	3,6496
9	3,7372
10	3,8029



c)

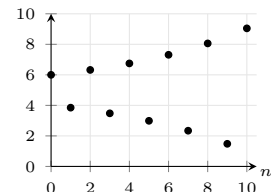
$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1,25 u_n + 1$$

n	u_n
0	0
1	1
2	2,25
3	3,8125
4	5,7656
5	8,207
6	11,259
7	15,073
8	19,842
9	25,802
10	33,253



d)

n	u_n
0	6
1	3,85
2	6,3225
3	3,4791
4	6,749
5	2,9886
6	7,3131
7	2,34
8	8,059
9	1,4821
10	9,0456



- 2) Déterminer chacune des limites suivantes par opérations algébriques :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n - 2 + e^n$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) (5 - \sqrt{n})$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 3}{\frac{2}{n} + e^{-n}}$

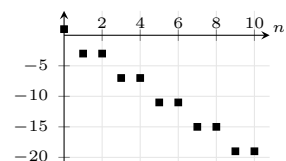
- 3) Lever l'indétermination de chacune des trois limites suivantes à l'aide d'une transformation d'écriture :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 - 2n + 1$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) (3n^2 + n + 1)$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - 8n}{2n + 1}$

- 4) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -2n + (-1)^n$.

- a. Conjecturer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ à partir du tableau et du graphique ci-contre.
b. Justifier cette conjecture par comparaison.

n	u_n
0	1
1	-3
2	-3
3	-7
4	-7
5	-11
6	-11
7	-15
8	-15
9	-19
10	-19



Exercice 2

5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

- 1)
 - a. Démontrer que $u_1 = 12$.
 - b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
 - c. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
- 2)
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- 3)
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3

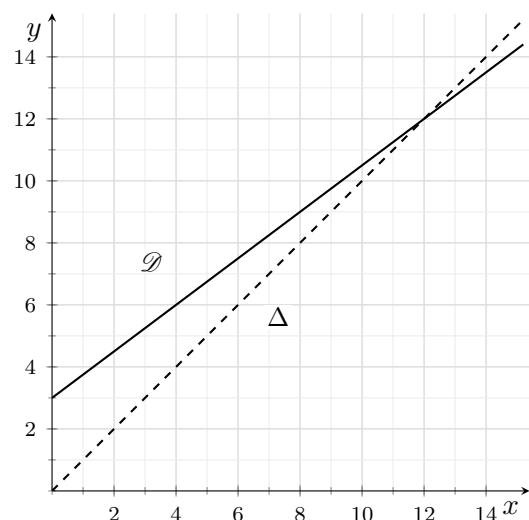
8 points

Lors d'une étude dans une réserve naturelle, on dénombre initialement 6 000 oiseaux. On observe que d'une année à l'autre :

- 25 % des oiseaux disparaissent par perte naturelle ou migration ;
- 3 000 nouveaux individus arrivent dans la réserve.

On note u_n le nombre d'oiseaux, exprimé en milliers, présents dans la réserve l'année n . Ainsi, leur nombre au début de l'observation est donné par $u_0 = 6$.

- 1)
 - a. Calculer u_1 . En déduire une estimation du nombre d'oiseaux après 1 an.
 - b. Expliquer que la suite (u_n) vérifie, pour tout entier $n \geq 0$: $u_{n+1} = 0,75 u_n + 3$.
- 2)
 - a. Sur le graphique ci-contre, où sont tracées la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0,75x + 3$ et la droite Δ d'équation $y = x$, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis construire les premiers termes u_1 , u_2 et u_3 .
 - b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



- 3) On considère la suite auxiliaire (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 12$.

- a. Calculer v_0 .
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - c. Exprimer, pour tout entier $n \geq 0$, v_n en fonction de n .
 - d. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -6 \times 0,75^n + 12$.
- 4) Donner, selon ce modèle, une estimation à l'unité près du nombre d'oiseaux dans cette réserve naturelle, dix années après le début de l'étude.
 - 5) Déterminer, en le détaillant, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 - 6) On admet le sens de variation de la suite (u_n) conjecturé en question 2).
 - a. Compléter ci-contre l'algorithme écrit en langage Python pour que la fonction `seuil` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 11,5$.
 - b. Quelle valeur obtient-on en exécutant l'instruction `seuil()`? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```

1 def seuil():
2     n = .....
3     u = .....
4     while .....:
5         n = .....
6         u = .....
7     return .....
```