

Exercice 1

3 points

1) Un réel r est une racine d'un trinôme P lorsque $P(r) = 0$. On remplace x par -1 :

- **a.** $(-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$;
- **b.** $2 \times (-1)^2 - (-1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$;
- **c.** $3 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$;
- **d.** $2 \times (-1)^2 + (-1) + 3 = 2 - 1 + 3 = 4 \neq 0$.

 Réponses **b** et **c**.

2) $f(x) = -3(x - 2)^2 + 4$ est la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = -3$, $\alpha = 2$ et $\beta = 4$.

- $a = -3 < 0$: la parabole est « tournée vers le bas » : **a** est vraie.
- Le sommet est $S(\alpha; \beta) = S(2; 4)$: **c** est vraie et **b** est fausse.
- $f(0) = -3 \times (0 - 2)^2 + 4 = -12 + 4 = -8$: la parabole coupe l'axe des ordonnées en $(0; -8)$, **d** est vraie.

 Réponses **a**, **c** et **d**.

3) D'après le tableau, f est décroissante puis croissante et admet un minimum égal à -3 atteint en $x = 2$. Sa forme canonique est donc du type $a(x - 2)^2 - 3$ avec $a > 0$.

- **a.** Le sommet de $x \mapsto 2(x + 2)^2 - 3$ a pour abscisse -2 , pas 2 : à exclure.
- **c.** $a = -2 < 0$: la fonction admettrait un maximum, pas un minimum : à exclure.
- **b.** et **d.** conviennent pour le sens de variation ; on contrôle les valeurs aux bornes :

$$2(-5 - 2)^2 - 3 = 98 - 3 = 95 \quad \text{et} \quad 2(6 - 2)^2 - 3 = 32 - 3 = 29 \quad (\text{conforme au tableau}),$$

$$3(-5 - 2)^2 - 3 = 147 - 3 = 144 \neq 95 \quad (\text{non conforme}).$$

 Réponse **b** : $f : x \mapsto 2(x - 2)^2 - 3$.

Exercice 2

4 points

1) **Ligne 2.** On développe la forme proposée :

$$\begin{aligned} 9 \left(x - \frac{8}{3} \right)^2 - 49 &= 9 \left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9} \right) - 49 \\ &= 9x^2 - 48x + 64 - 49 \\ &= 9x^2 - 48x + 15 = f(x). \end{aligned}$$

Ligne 3. On développe la forme factorisée :

$$\begin{aligned} 3(x - 5)(3x - 1) &= 3(3x^2 - x - 15x + 5) \\ &= 3(3x^2 - 16x + 5) \\ &= 9x^2 - 48x + 15 = f(x). \end{aligned}$$

Les résultats des lignes 2 et 3 sont exacts.

- 2) a. On utilise la **forme canonique** $f(x) = 9 \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 - 49$, de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{8}{3}$ et $\beta = -49$. Le sommet de $\mathcal{C}$ est donc

$$S \left(\frac{8}{3}; -49 \right)$$

Vérification : $f\left(\frac{8}{3}\right) = 9 \times \frac{64}{9} - 48 \times \frac{8}{3} + 15 = 64 - 128 + 15 = -49$.

- b. On utilise la **forme factorisée**. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ($3 \neq 0$) :

$$f(x) = 0 \iff 3(x - 5)(3x - 1) = 0 \iff x - 5 = 0 \text{ ou } 3x - 1 = 0 \iff x = 5 \text{ ou } x = \frac{1}{3}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{3}; 5 \right\}$$

- c. On utilise la **forme développée** :

$$f(x) < 15 \iff 9x^2 - 48x + 15 < 15 \iff 9x^2 - 48x < 0 \iff 3x(3x - 16) < 0.$$

Le trinôme $9x^2 - 48x = 3x(3x - 16)$ a pour racines 0 et $\frac{16}{3}$; son coefficient $a = 9$ est positif, il est donc négatif strictement entre ses racines :

x	$-\infty$	0	$\frac{16}{3}$	$+\infty$	
$3x(3x - 16)$	+	0	-	0	+

$$\mathcal{S} = \left] 0; \frac{16}{3} \right[$$

Vérification : $f(1) = 9 - 48 + 15 = -24 < 15$ (1 est solution) et $f(6) = 324 - 288 + 15 = 51 > 15$ (6 n'est pas solution).

Exercice 3

3 points

- 1) On factorise par $-0,2$ les termes en x , puis on fait apparaître un carré ($-0,2 \times (-64) = 12,8$) :

$$\begin{aligned} g(x) &= -0,2(x^2 - 64x) + 1\,800 \\ &= -0,2[(x - 32)^2 - 32^2] + 1\,800 \\ &= -0,2[(x - 32)^2 - 1\,024] + 1\,800 \\ &= -0,2(x - 32)^2 + 204,8 + 1\,800. \end{aligned}$$

$$g(x) = -0,2(x - 32)^2 + 2\,004,8$$

Vérification : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{12,8}{2 \times (-0,2)} = 32$ et $g(32) = -0,2 \times 1\,024 + 12,8 \times 32 + 1\,800 = -204,8 + 409,6 + 1\,800 = 2\,004,8$.

- 2) g est un trinôme avec $a = -0,2 < 0$: elle est croissante sur $] -\infty ; 32]$ et décroissante sur $[32 ; +\infty[$, et $32 \in [0 ; 90]$. On calcule les valeurs utiles :

$$g(0) = 1\,800, \quad g(32) = 2\,004,8,$$

$$g(90) = -0,2 \times 8\,100 + 12,8 \times 90 + 1\,800 = -1\,620 + 1\,152 + 1\,800 = 1\,332.$$

x	0	32	90
variations de g	1 800	2 004,8	1 332

- 3) D'après le tableau de variations, g admet sur $[0 ; 90]$ un maximum égal à 2 004,8, atteint pour $x = 32$.

Il faut incliner le panneau de 32° : il reçoit alors 2 004,8 kWh par an.

Exercice 4

3 points

- 1) $(\mathcal{P})$ est une parabole de sommet $S(1 ; 2,4)$: elle admet une équation de la forme

$$y = a(x - 1)^2 + 2,4, \quad a \neq 0.$$

Emma part du bord du plongoir, sur l'axe des ordonnées, à 2 m de haut : le point $(0 ; 2)$ appartient à $(\mathcal{P})$. Donc

$$a(0 - 1)^2 + 2,4 = 2 \iff a + 2,4 = 2 \iff a = -0,4.$$

$$(\mathcal{P}) : y = -0,4(x - 1)^2 + 2,4 \quad \text{soit, sous forme développée, } y = -0,4x^2 + 0,8x + 2.$$

- 2) $a = -0,4 < 0$: la parabole est « tournée vers le bas » et son sommet $S(1 ; 2,4)$ est son point le plus haut.

La hauteur maximale atteinte par Emma est 2,4 m.

Elle est atteinte à 1 m (horizontalement) du bord du plongeur.

- 3) Emma touche l'eau lorsque sa hauteur est nulle, avec $x > 0$:

$$\begin{aligned} -0,4(x-1)^2 + 2,4 &= 0 &\iff 0,4(x-1)^2 &= 2,4 \\ &&\iff (x-1)^2 &= 6 \\ &&\iff x-1 &= \sqrt{6} \text{ ou } x-1 = -\sqrt{6} \\ &&\iff x &= 1 + \sqrt{6} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Comme $1 - \sqrt{6} \approx -1,45 < 0$, on retient $x = 1 + \sqrt{6} \approx 3,449$: Emma touche l'eau à environ 3,45 m de O .

Le pied A du plongeur est à 0,5 m de O , du côté opposé. En notant E le point où Emma touche l'eau, la distance cherchée est donc

$$AE = 0,5 + 1 + \sqrt{6} = 1,5 + \sqrt{6} \approx 3,949.$$

Emma touche l'eau à environ 3,95 m du pied A du plongeur.

Vérification : $-0,4(1 + \sqrt{6} - 1)^2 + 2,4 = -0,4 \times 6 + 2,4 = 0$.

Exercice bonus

- 1) On suppose que, pour tout réel x , $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$. Alors

$$h(0) = 0 - 0 + 1 = 1 \quad \text{et} \quad h(2) = \frac{1}{4} \times 4 - 2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Les points $(0; 1)$ et $(2; 0)$ appartiennent donc à la parabole représentant h .

La proposition est vraie.

Remarque : $h(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2$; le point $(2; 0)$ est le sommet de la parabole.

- 2) La réciproque s'énonce : « Si les points $(0; 1)$ et $(2; 0)$ appartiennent à la parabole représentant h , alors, pour tout réel x , $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$. »

Il suffit d'un contre-exemple. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$, polynôme du second degré :

$$h(0) = 1 \quad \text{et} \quad h(2) = 4 - 5 + 1 = 0.$$

Les deux points appartiennent à sa parabole, et pourtant $h(x) \neq \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ (les coefficients de x^2 diffèrent).

La réciproque est fausse.

Remarque : deux points ne suffisent pas à déterminer une parabole : tout trinôme $ax^2 + bx + 1$ avec $4a + 2b + 1 = 0$ et $a \neq 0$ convient.