

Rappels. Une suite arithmétique de raison r vérifie $u_n = u_p + (n - p)r$ pour tous entiers n et p ; une suite géométrique de raison q vérifie $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Exercice 1

3 points

- 1) La suite (u_n) est arithmétique de raison r , donc $u_{20} = u_{13} + (20 - 13)r = u_{13} + 7r$. Ainsi :

$$51,4 = 36 + 7r \iff 7r = 15,4 \text{ on retranche } 36$$

$$\iff r = \frac{15,4}{7} \text{ on divise par } 7$$

$$\iff r = 2,2.$$

$$\boxed{r = 2,2}$$

- 2) On a $u_{13} = u_0 + 13r$, donc :

$$u_0 = u_{13} - 13r = 36 - 13 \times 2,2 = 36 - 28,6 = 7,4.$$

$$\boxed{u_0 = 7,4}$$

- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$, donc :

$$\boxed{u_n = 7,4 + 2,2n}$$

Vérification : $u_{13} = 7,4 + 2,2 \times 13 = 7,4 + 28,6 = 36$ et $u_{20} = 7,4 + 2,2 \times 20 = 7,4 + 44 = 51,4$.

Exercice 2

1,5 point

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + (-2)$: on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre -2 . La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 5$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$, d'où :

$$\boxed{u_n = 5 - 2n}$$

Vérification : $u_1 = u_0 - 2 = 3$ et $5 - 2 \times 1 = 3$.

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2 < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$ (une suite arithmétique de raison négative est décroissante).

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 3

1,5 point

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (25 - 3(n+1)) - (25 - 3n) = 25 - 3n - 3 - 25 + 3n = -3.$$

La différence entre deux termes consécutifs est constante, égale à -3 . De plus $u_0 = 25 - 3 \times 0 = 25$.

(u_n) est arithmétique de raison $r = -3$ et de terme initial $u_0 = 25$.

Remarque : on reconnaît la forme $u_n = u_0 + nr$ avec $u_0 = 25$ et $r = -3$.

Exercice 4

3 points

On calcule les premiers termes :

$$u_1 = 0,5 \times 4 + 6 = 8, \quad u_2 = 0,5 \times 8 + 6 = 10, \quad u_3 = 0,5 \times 10 + 6 = 11.$$

Arithmétique? $u_1 - u_0 = 8 - 4 = 4$ et $u_2 - u_1 = 10 - 8 = 2$.

Les différences entre termes consécutifs ne sont pas égales ($4 \neq 2$).

La suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Géométrie? $\frac{u_1}{u_0} = \frac{8}{4} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{8} = 1,25$.

Les quotients entre termes consécutifs ne sont pas égaux ($2 \neq 1,25$).

La suite (u_n) n'est pas géométrique.

Attention : la relation $u_{n+1} = 0,5 u_n + 6$ mélange une multiplication et une addition; elle n'est ni de la forme $u_{n+1} = u_n + r$, ni de la forme $u_{n+1} = q u_n$. Un seul contre-exemple suffit pour conclure.

Exercice 5

2 points

1) La suite (v_n) est géométrique de raison 3, donc $v_4 = v_1 \times 3^{4-1} = 27 v_1$. Ainsi :

$$v_1 = \frac{v_4}{27} = \frac{-18}{27} = -\frac{2}{3}.$$

$$v_1 = -\frac{2}{3}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times 3^{n-1}$, d'où :

$$v_n = -\frac{2}{3} \times 3^{n-1}$$

Forme équivalente avec $v_0 : v_0 = \frac{v_1}{3} = -\frac{2}{9}$, donc $v_n = -\frac{2}{9} \times 3^n$.

Vérification : $v_4 = -\frac{2}{3} \times 3^3 = -\frac{2}{3} \times 27 = -18$.

Exercice 6

1,5 point

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n r = 5 + 0,7 n$. On résout dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n \geq 1000 &\iff 5 + 0,7 n \geq 1000 \\ &\iff 0,7 n \geq 995 && \text{on retranche 5} \\ &\iff n \geq \frac{995}{0,7} && \text{on divise par } 0,7 > 0 \\ &\iff n \geq \frac{9950}{7} \approx 1\,421,43. \end{aligned}$$

Le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{9950}{7}$ est 1 422.

$$\boxed{n = 1\,422}$$

Vérification : $u_{1\,421} = 5 + 0,7 \times 1\,421 = 999,7 < 1\,000$ et $u_{1\,422} = 5 + 0,7 \times 1\,422 = 1\,000,4 \geq 1\,000$.

Exercice 7

1,5 point

1) On note q la raison. On a $v_3 = v_0 \times q^3$, donc :

$$\begin{aligned} 972 = -36 q^3 &\iff q^3 = \frac{972}{-36} && \text{on divise par } -36 \\ &\iff q^3 = -27 \\ &\iff q = -3 && \text{car } (-3)^3 = -27. \end{aligned}$$

$$\boxed{q = -3}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$, d'où :

$$\boxed{v_n = -36 \times (-3)^n}$$

Vérification : $v_3 = -36 \times (-3)^3 = -36 \times (-27) = 972$.

Exercice 8

2 points

On note b_n le nombre de bactéries au bout de n heures; ainsi $b_0 = 5\,000$.

Perdre 12 % revient à multiplier par le coefficient multiplicateur $1 - \frac{12}{100} = 0,88$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 0,88 b_n$: la suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0,88$ et de premier terme $b_0 = 5\,000$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = 5\,000 \times 0,88^n.$$

Au bout de six heures :

$$b_6 = 5\,000 \times 0,88^6 \approx 2\,322,02.$$

Au bout de six heures, il reste environ 2 322 bactéries.

Attention : le coefficient multiplicateur est 0,88 et non 0,12 (qui est la proportion qui disparaît).

Exercice 9

2 points

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 u_n$: la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $u_0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$, d'où :

$$u_n = 0,7^n$$

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,7^n > 0$ et

$$u_{n+1} - u_n = 0,7 u_n - u_n = -0,3 u_n < 0.$$

Donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est strictement décroissante (premier terme positif et raison comprise strictement entre 0 et 1).

On passe d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre : il s'agit d'une évolution exponentielle (et non linéaire, qui correspondrait à l'ajout d'un même nombre).

(u_n) est strictement décroissante : décroissance exponentielle.

Vérification : $u_0 = 1 > u_1 = 0,7 > u_2 = 0,49 > u_3 = 0,343$.

- 3) À la calculatrice, $u_{10} = 0,7^{10} \approx 0,028$ et $u_{20} = 0,7^{20} \approx 0,000\,8$: les termes se rapprochent de 0 (en restant positifs).

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 10

2 points

Les termes 2, 4, 6, ..., 1 002 sont les termes consécutifs de la suite arithmétique (a_k) de premier terme $a_1 = 2$ et de raison 2 : pour tout entier $k \geq 1$, $a_k = 2k$.

Nombre de termes. $2k = 1\,002 \iff k = 501$: la somme compte 501 termes (de a_1 à a_{501}).

Somme. Pour une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = 501 \times \frac{2 + 1\,002}{2} = 501 \times 502.$$

$$\boxed{S = 251\,502}$$

$$\text{Autre méthode : } S = 2(1 + 2 + \dots + 501) = 2 \times \frac{501 \times 502}{2} = 501 \times 502 = 251\,502.$$

Attention : il n'y a pas 1 002 ni 1 003 termes, mais seulement les nombres pairs de 2 à 1 002, soit 501 termes.