

Exercice 1

5 points

- 1) Augmenter un montant de 2,5 % revient à le multiplier par le coefficient multiplicateur

$$1 + \frac{2,5}{100} = 1,025.$$

Chaque année, le montant du livret est donc multiplié par 1,025 :

$$u_1 = 5\,000 \times 1,025 = \boxed{5\,125 \text{ €}}$$

$$u_2 = 5\,125 \times 1,025 = 5\,253,125 \approx \boxed{5\,253,13 \text{ €}}$$

$$u_3 = 5\,253,125 \times 1,025 = 5\,384,453\,125 \approx \boxed{5\,384,45 \text{ €}}$$

- 2) D'une année à la suivante, les intérêts de 2,5 % s'ajoutent au montant présent sur le compte, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2,5}{100} u_n = 1,025 u_n.$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre :

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,025$ et de premier terme $u_0 = 5\,000$.

- 3) Pour une suite géométrique, $u_n = u_0 \times q^n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 5\,000 \times 1,025^n$$

Vérification : $u_3 = 5\,000 \times 1,025^3 = 5\,384,453\,125$, comme à la question 1).

- 4) Au bout de 10 ans, le montant est u_{10} :

$$u_{10} = 5\,000 \times 1,025^{10} \approx 5\,000 \times 1,280\,085 \approx \boxed{6\,400,42 \text{ €}}$$

- 5) On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10\,000$ (le double de 5 000 €), c'est-à-dire :

$$5\,000 \times 1,025^n \geq 10\,000 \iff 1,025^n \geq 2.$$

La suite (u_n) est croissante (raison $1,025 > 1$ et $u_0 > 0$). À la calculatrice (tableau de valeurs de $5\,000 \times 1,025^x$) :

$$u_{28} \approx 9\,982,48 \text{ €} < 10\,000 \text{ €} \quad \text{et} \quad u_{29} \approx 10\,232,04 \text{ €} \geq 10\,000 \text{ €}.$$

Il faut attendre 29 ans pour doubler le capital de départ.

Exercice 2

5 points

1) Pour une suite arithmétique de raison r , on a $u_n = u_p + (n - p)r$ pour tous entiers n et p . Ainsi :

$$u_{13} = u_7 + 6r \iff 17 = 5 + 6r \iff 6r = 12 \iff r = 2.$$

Puis $u_7 = u_0 + 7r$, donc $u_0 = u_7 - 7r = 5 - 14 = -9$.

$$\boxed{r = 2 \quad \text{et} \quad u_0 = -9}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -9 + 2n$. **Vérification** : $u_7 = -9 + 14 = 5$ et $u_{13} = -9 + 26 = 17$.

2) La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

De u_0 à u_{19} , il y a 20 termes, et $u_{19} = -9 + 2 \times 19 = 29$. Donc :

$$S_{19} = 20 \times \frac{u_0 + u_{19}}{2} = 20 \times \frac{-9 + 29}{2} = 20 \times 10 = \boxed{200}$$

3) De u_0 à u_n , il y a $n + 1$ termes et $u_n = -9 + 2n$. Donc :

$$S_n = (n + 1) \times \frac{-9 + (-9 + 2n)}{2} = (n + 1) \times \frac{2n - 18}{2} = (n + 1)(n - 9) = n^2 - 8n - 9.$$

On résout, pour n entier naturel :

$$S_n = 1\,131 \iff n^2 - 8n - 9 = 1\,131 \iff n^2 - 8n - 1\,140 = 0.$$

C'est une équation du second degré de discriminant

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (-1\,140) = 64 + 4\,560 = 4\,624 = 68^2 > 0.$$

Elle a deux solutions :

$$n_1 = \frac{8 - 68}{2} = -30 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{8 + 68}{2} = 38.$$

Comme n est un entier naturel, on ne garde que n_2 :

$$\boxed{n = 38}$$

$$\text{Vérification : } S_{38} = 39 \times \frac{-9 + 67}{2} = 39 \times 29 = 1\,131.$$

Exercice 3

10 points

1) On applique la relation de récurrence :

$$u_1 = \frac{2}{3} \times 6 + 1 = 4 + 1 = \boxed{5}$$

$$u_2 = \frac{2}{3} \times 5 + 1 = \frac{10}{3} + \frac{3}{3} = \boxed{\frac{13}{3}}$$

- $u_1 - u_0 = 5 - 6 = -1$ et $u_2 - u_1 = \frac{13}{3} - 5 = -\frac{2}{3}$. Ces différences ne sont pas égales :

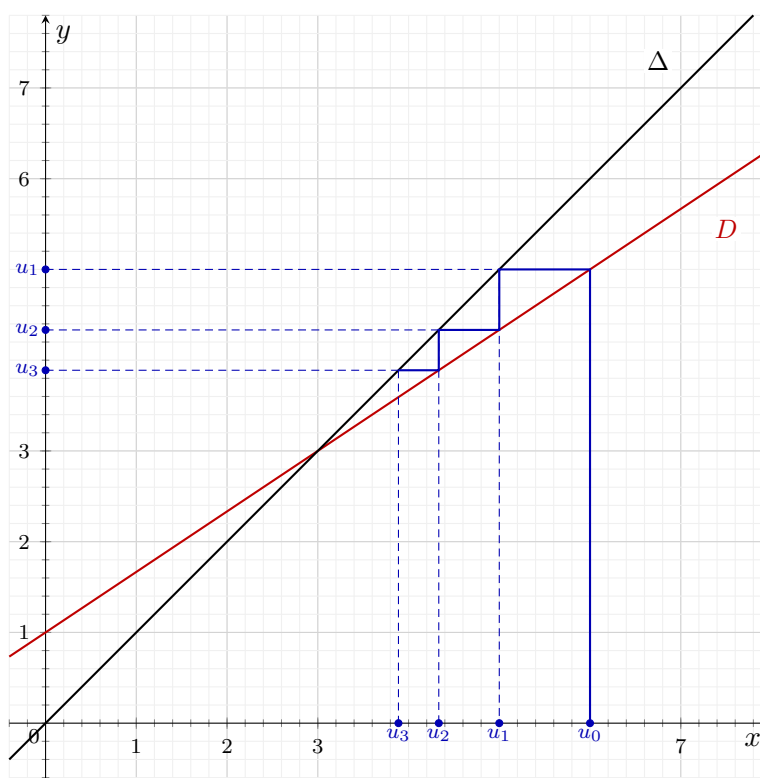
(u_n) n'est pas arithmétique.

- $\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{6}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{13}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$. Ces quotients ne sont pas égaux ($\frac{5}{6} = \frac{25}{30} \neq \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$) :

(u_n) n'est pas géométrique.

- 2) a. D est la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + 1$: elle passe par les points $(0; 1)$, $(3; 3)$ et $(6; 5)$. Δ est la droite d'équation $y = x$: elle passe par l'origine et par $(1; 1)$. Elles sont tracées sur la figure ci-dessous.

- b. On part de $u_0 = 6$ sur l'axe des abscisses. On monte verticalement jusqu'à D : le point atteint a pour ordonnée $\frac{2}{3}u_0 + 1 = u_1$. On se déplace horizontalement jusqu'à Δ : le point atteint a pour abscisse u_1 , que l'on reporte sur l'axe des abscisses. On recommence à partir de u_1 , puis de u_2 .



Vérification par le calcul : $u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{13}{3} + 1 = \frac{26}{9} + \frac{9}{9} = \frac{35}{9} \approx 3,89$.

- c. Sur l'axe des abscisses, les termes u_0, u_1, u_2, u_3 se déplacent vers la gauche : on conjecture que la suite (u_n) est décroissante.

Ils se rapprochent de l'abscisse du point d'intersection de D et Δ , qui vérifie

$$\frac{2}{3}x + 1 = x \iff 1 = \frac{1}{3}x \iff x = 3.$$

On conjecture que la suite (u_n) a pour limite 3.

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 && \text{(définition de } v_{n+1}) \\ &= \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 && \text{(relation de récurrence)} \\ &= \frac{2}{3}u_n - 2 \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 3) && \text{(car } \frac{2}{3} \times 3 = 2) \\ &= \frac{2}{3}v_n. \end{aligned}$$

$$(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3.$$

b. Pour une suite géométrique, $v_n = v_0 \times q^n$. Puis $v_n = u_n - 3$ donne $u_n = v_n + 3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$u_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

$$\text{Vérification : } u_2 = 3 \times \frac{4}{9} + 3 = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3} \text{ et } u_3 = 3 \times \frac{8}{27} + 3 = \frac{8}{9} + 3 = \frac{35}{9}.$$

c. Sens de variation. Pour tout n , $v_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$. Alors

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}v_n - v_n = -\frac{1}{3}v_n < 0.$$

Donc (v_n) est strictement décroissante. (On retrouve la règle : premier terme positif et raison comprise entre 0 et 1.)

Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = (v_{n+1} + 3) - (v_n + 3) = v_{n+1} - v_n < 0$, donc

$$(u_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Limite. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $v_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ tend aussi vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 + 3 = 3$$

Les conjectures de la question 2)c. sont confirmées.