

Exercice 1

5 points

- 1) On reconnaît une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -3$, $b = -5$ et $c = 2$.
On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 25 + 24 = 49 = 7^2.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 7}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 7}{-6} = \frac{12}{-6} = -2.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -2; \frac{1}{3} \right\}$$

Vérification : $-3 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 2 = -12 + 10 + 2 = 0$ et $-3 \times \frac{1}{9} - \frac{5}{3} + 2 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3} + 2 = 0$.
Le polynôme ayant deux racines, il se factorise sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$:

$$-3x^2 - 5x + 2 = -3 \left(x - \frac{1}{3} \right) (x + 2) = (1 - 3x)(x + 2)$$

Vérification : $(1 - 3x)(x + 2) = x + 2 - 3x^2 - 6x = -3x^2 - 5x + 2$.

- 2) Pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} - t_n = 5^{n+1} - 5^n = 5^n \times 5 - 5^n = 5^n(5 - 1) = 4 \times 5^n.$$

Or $5^n > 0$ pour tout n , donc $t_{n+1} - t_n > 0$, c'est-à-dire $t_{n+1} > t_n$.

La suite (t_n) est strictement croissante.

Autre méthode : tous les termes sont strictement positifs et $\frac{t_{n+1}}{t_n} = 5 > 1$.

Vérification : $t_0 = 1 < t_1 = 5 < t_2 = 25 < t_3 = 125$.

- 3) On applique la relation de récurrence avec $n = 0$, puis avec $n = 1$:

$$w_1 = \frac{2w_0 + 1}{w_0 + 5} = \frac{2 \times 4 + 1}{4 + 5} = \frac{9}{9} = \boxed{1} \quad w_2 = \frac{2w_1 + 1}{w_1 + 5} = \frac{2 \times 1 + 1}{1 + 5} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 2

8 points

- 1) a. Suite (u_n) (formule explicite) : on remplace n par 0, 1 et 2 dans $u_n = -3n + 1$:

$$u_0 = -3 \times 0 + 1 = \boxed{1} \quad u_1 = -3 \times 1 + 1 = \boxed{-2} \quad u_2 = -3 \times 2 + 1 = \boxed{-5}.$$

Suite (v_n) (relation de récurrence) : $v_0 = \boxed{-1}$, puis on applique la relation avec $n = 0$ et $n = 1$:

$$v_1 = v_0 - (0 - 1)^2 = -1 - 1 = \boxed{-2} \quad v_2 = v_1 - (1 - 1)^2 = -2 - 0 = \boxed{-2}.$$

- b. La suite commence à u_0 : le 1^{er} terme est u_0 , le 2^e est u_1 , ..., donc le 20^e terme est u_{19} .

$$u_{19} = -3 \times 19 + 1 = -57 + 1 = \boxed{-56}.$$

- 2) a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = (-3(n+1) + 1) - (-3n + 1) = -3n - 3 + 1 + 3n - 1 = -3.$$

Donc $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$ pour tout n , c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Remarque : (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $-3 < 0$.

- b. D'après la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = -(n-1)^2.$$

Un carré est positif ou nul : $(n-1)^2 \geq 0$, donc $v_{n+1} - v_n = -(n-1)^2 \leq 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} \leq v_n$ pour tout n .

La suite (v_n) est décroissante.

Remarque : elle n'est pas strictement décroissante, car pour $n = 1$ la différence est nulle : $v_2 = v_1 = -2$. Ensuite, $v_3 = -3$, $v_4 = -7$, $v_5 = -16$.

- 3) a. Avec $n = 3$, la variable w vaut d'abord 1, puis la boucle s'exécute pour $i = 1, 2$ et 3 :

i	calcul	valeur affichée
1	$3 \times 1 + 2$	5
2	$3 \times 5 + 2$	17
3	$3 \times 17 + 2$	53

La fonction affiche successivement 5, 17 et 53.

- b. La variable w part de 1 et, à chaque passage dans la boucle, elle est remplacée par $3w + 2$. La suite associée est donc définie par récurrence :

$$w_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = 3w_n + 2.$$

L'appel $w(n)$ affiche $w_1, \dots, w_n$: pour $n = 3$, $w_1 = 5$, $w_2 = 17$, $w_3 = 53$.

Exercice 3

7 points

- 1) a. Pour tout entier naturel n , on réduit au même dénominateur $n + 2$ (qui est non nul) :

$$u_n - 1 = \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+2}{n+2} = \frac{n+4-n-2}{n+2}, \quad \text{donc} \quad \boxed{u_n - 1 = \frac{2}{n+2}}.$$

$$\text{Vérification : } u_0 = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } \frac{2}{0+2} = 1 = u_0 - 1.$$

- b. On utilise le résultat précédent :

$$u_{99} - 1 = \frac{2}{101} \approx 0,02 \quad u_{999} - 1 = \frac{2}{1001} \approx 0,002 \quad u_{99\,999} - 1 = \frac{2}{100\,001} \approx 0,000\,02.$$

Les écarts $u_n - 1$ sont positifs et deviennent de plus en plus petits.

Conjecture : lorsque n devient de plus en plus grand, les termes u_n se rapprochent de 1 (en restant supérieurs à 1) :

la suite (u_n) semble avoir pour limite 1.

- 2) Pour tout entier naturel n , d'après la question 1)a., $u_n = 1 + \frac{2}{n+2}$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{n+3}$, donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{n+3} - \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2(n+2) - 2(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{2n+4-2n-6}{(n+2)(n+3)} = \frac{-2}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$, donc le dénominateur est strictement positif; le numérateur -2 est strictement négatif. Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

$$\text{Vérification : } u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{3} \approx 1,67, u_2 = \frac{6}{4} = 1,5, u_3 = \frac{7}{5} = 1,4; \text{ et } u_1 - u_0 = -\frac{1}{3} = \frac{-2}{2 \times 3}.$$

- 3) On part de $n = 0$ et on augmente n de 1 tant que $u_n > a$: la boucle s'arrête au premier entier n tel que $u_n \leq a$, et c'est cet entier que l'on renvoie.

```

1 def seuil(a):
2     n = 0
3     while (n+4)/(n+2) > a:
4         n = n + 1
5     return n

```

La boucle se termine bien : $u_0 = 2 \geq a$ si $a = 2$ (on renvoie alors 0), et sinon $a > 1$ alors que $u_n - 1 = \frac{2}{n+2}$ devient aussi petit que l'on veut, donc u_n finit par passer sous a .

Exemple (programme exécuté) : `seuil(1.1)` renvoie 18. En effet, $u_n \leq 1,1 \iff \frac{2}{n+2} \leq 0,1 \iff n+2 \geq 20 \iff n \geq 18$; et $u_{17} = \frac{21}{19} \approx 1,105 > 1,1$, $u_{18} = \frac{22}{20} = 1,1$.