

Exercice 1

5 points

- 1) (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n r \quad \text{soit} \quad \boxed{u_n = 3 + 2n}.$$

Pour $n = 50$: $u_{50} = 3 + 2 \times 50 = 3 + 100$, donc $\boxed{u_{50} = 103}$.

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r = 2 > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

Vérification : $u_0 = 3 < u_1 = 5 < u_2 = 7$.

- 3) S est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique. Elle compte $50 - 0 + 1 = 51$ termes, donc :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$S = 51 \times \frac{u_0 + u_{50}}{2} = 51 \times \frac{3 + 103}{2} = 51 \times 53.$$

$$\boxed{S = 2703}$$

Autre méthode : $S = \sum_{k=0}^{50} (3 + 2k) = 3 \times 51 + 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 153 + 2550 = 2703.$

Exercice 2

2 points

- 1) Pour $n = 5$, la boucle s'exécute pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$, soit 5 fois. À chaque passage, U est remplacé par $2U - 1$ et la nouvelle valeur est ajoutée à la liste :

$$2 \times 3 - 1 = 5, \quad 2 \times 5 - 1 = 9, \quad 2 \times 9 - 1 = 17, \quad 2 \times 17 - 1 = 33, \quad 2 \times 33 - 1 = 65.$$

En fin d'algorithme : $\boxed{L = [3, 5, 9, 17, 33, 65]}$, c'est-à-dire la liste des termes u_0 à u_5 .

Vérification : l'appel `suite_U(5)` renvoie bien $[3, 5, 9, 17, 33, 65]$.

- 2) À chaque étape, la nouvelle valeur de U (le terme suivant) s'obtient en multipliant la valeur précédente par 2 puis en retranchant 1. Donc, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_{n+1} = 2u_n - 1} \quad \text{avec } u_0 = 3.$$

Exercice 3

5 points

- 1) La variable S part de $u_0 = 5$. La boucle doit ensuite calculer et ajouter les termes $u_1, \dots, u_{10}$, soit 10 passages ; à chaque passage on multiplie U par la raison 2, puis on l'ajoute à S .

```

1 def suite_somme():
2     U = 5
3     S = 5
4     for i in range(10):
5         U = 2*U
6         S = S + U
7     return S

```

(On peut aussi écrire `range(1, 11)`, qui donne également 10 passages.) L'exécution renvoie 10235.

- 2) a. Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- b. (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 2, donc $u_k = 5 \times 2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 u_0 + u_1 + \dots + u_{10} &= 5 \times (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}) \\
 &= 5 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} \\
 &= 5 \times \frac{1 - 2048}{-1} \\
 &= 5 \times 2047
 \end{aligned}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = 10\,235$$

Vérification : on retrouve la valeur renvoyée par le programme de la question 1).

Exercice 4

8 points

- 1) En 2010, il y a 300 rongeurs, donc $u_0 = 300$.

Chaque année, la population diminue de 10 %; diminuer de 10 % revient à multiplier par

$$1 - \frac{10}{100} = 0,9.$$

On ajoute ensuite 10 rongeurs. Donc le nombre de rongeurs l'année $2010 + n + 1$ est, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 0,9 u_n + 10.$$

- 2) a. $u_1 = 0,9 \times 300 + 10 = 270 + 10$, donc $u_1 = 280$.

$$u_2 = 0,9 \times 280 + 10 = 252 + 10, \text{ donc } u_2 = 262.$$

- b. Arithmétique ? $u_1 - u_0 = 280 - 300 = -20$ et $u_2 - u_1 = 262 - 280 = -18$.

Ces différences ne sont pas égales, donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Géométrique ? $\frac{u_1}{u_0} = \frac{280}{300} = \frac{14}{15} \approx 0,933$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{262}{280} = \frac{131}{140} \approx 0,936$.

Ces quotients ne sont pas égaux : $\frac{14}{15} = \frac{392}{420}$ et $\frac{131}{140} = \frac{393}{420}$.

Donc (u_n) n'est pas géométrique.

- 3) a. $v_0 = u_0 - 100 = 300 - 100$, donc $v_0 = 200$; $v_1 = u_1 - 100 = 280 - 100$, donc $v_1 = 180$;
 $v_2 = u_2 - 100 = 262 - 100$, donc $v_2 = 162$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 100 \\ &= 0,9 u_n + 10 - 100 \\ &= 0,9 u_n - 90 \\ &= 0,9 (u_n - 100) \quad \text{car } 0,9 \times 100 = 90 \\ &= 0,9 v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = 200$.

Vérification : $0,9 \times 200 = 180 = v_1$ et $0,9 \times 180 = 162 = v_2$.

- c. (v_n) étant géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$, soit $v_n = 200 \times 0,9^n$.
 Comme $v_n = u_n - 100$, on a $u_n = v_n + 100$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 200 \times 0,9^n + 100.$$

Vérification : $u_0 = 200 + 100 = 300$, $u_1 = 180 + 100 = 280$, $u_2 = 162 + 100 = 262$.

- 4) La population a diminué de moitié lorsqu'elle est inférieure ou égale à $\frac{300}{2} = 150$ rongeurs. On cherche donc le plus petit entier n tel que $u_n \leq 150$.

La suite (u_n) est décroissante : comme $0 < 0,9 < 1$, la suite $(0,9^n)$ est décroissante, donc (u_n) aussi puisque $u_n = 200 \times 0,9^n + 100$ avec $200 > 0$.

À la calculatrice (mode suite ou tableau de valeurs de $200 \times 0,9^x + 100$) :

n	12	13	14	15
u_n (arrondi au centième)	156,49	150,84	145,75	141,18

$u_{13} \approx 150,84 > 150$ et $u_{14} \approx 145,75 \leq 150$: le plus petit entier qui convient est $n = 14$, et $2010 + 14 = 2024$.

La population aura diminué de moitié en 2024.

Exercice 5**bonus**

Un nombre impair s'écrit $2k + 1$ avec k entier. Neuf nombres impairs consécutifs s'écrivent donc

$$2k + 1, \quad 2k + 3, \quad 2k + 5, \quad \dots, \quad 2k + 17.$$

Leur somme vaut $9 \times 2k + (1 + 3 + 5 + \dots + 17) = 18k + 81$ (car $1 + 3 + \dots + 17 = 9 \times \frac{1 + 17}{2} = 81$).

$$18k + 81 = 153 \iff 18k = 72 \iff k = 4.$$

Le premier nombre est $2 \times 4 + 1 = 9$, d'où les neuf nombres :

$$\boxed{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25}$$

Vérification : ces neuf nombres forment une suite arithmétique de raison 2, donc leur somme vaut $9 \times \frac{9 + 25}{2} = 9 \times 17 = 153$.

Autre méthode : le nombre du milieu (le 5^e) est la moyenne des neuf nombres, soit $\frac{153}{9} = 17$; on compte ensuite de 2 en 2 de part et d'autre de 17.