

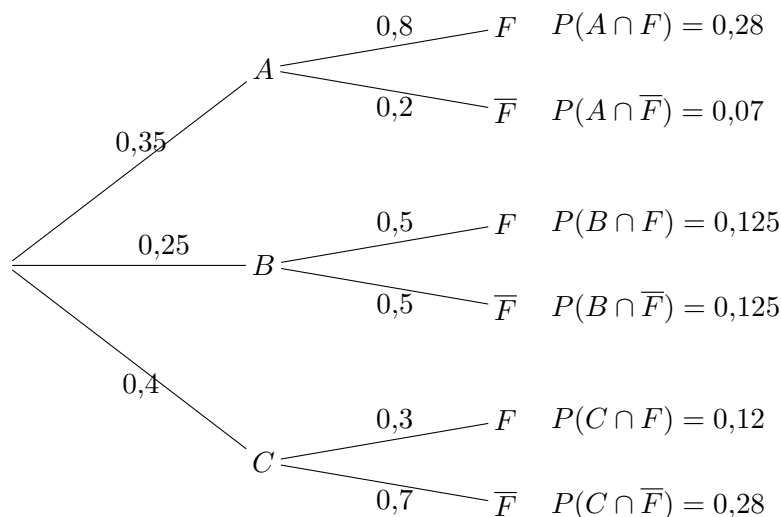
Exercice 1

6 points

- 1) L'énoncé donne $P(A) = 0,35$ et $P(B) = 0,25$. Le reste provient de C :

$$P(C) = 1 - 0,35 - 0,25 = 0,4.$$

Les proportions de fleurs donnent les probabilités conditionnelles : $P_A(F) = 0,8$, $P_B(F) = 0,5$, $P_C(F) = 0,3$, d'où $P_A(\bar{F}) = 0,2$, $P_B(\bar{F}) = 0,5$, $P_C(\bar{F}) = 0,7$.



Vérification : les probabilités des six chemins ont pour somme $0,28 + 0,07 + 0,125 + 0,125 + 0,12 + 0,28 = 1$.

- 2) On cherche $P(A \cap F)$. On suit le chemin A puis F :

$$P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) = 0,35 \times 0,8 = \boxed{0,28}.$$

- 3) A , B et C forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) = 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3$$

$$P(F) = 0,28 + 0,125 + 0,12 = \boxed{0,525}.$$

- 4) A et F sont indépendants si et seulement si $P(A \cap F) = P(A) \times P(F)$. Or :

$$P(A) \times P(F) = 0,35 \times 0,525 = 0,18375 \quad \text{et} \quad P(A \cap F) = 0,28.$$

Comme $0,28 \neq 0,18375$, les événements A et F ne sont pas indépendants.

Autre justification : $P_A(F) = 0,8 \neq P(F) = 0,525$.

- 5) On cherche $P_F(A)$:

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0,28}{0,525} = \boxed{\frac{8}{15} \approx 0,533}.$$

- 6) On cherche $P_A(F)$: c'est une donnée de l'énoncé (80 % des articles de A sont des fleurs).

$$P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{0,28}{0,35} = \boxed{0,8}.$$

Remarque : il ne faut pas confondre $P_F(A) \approx 0,533$ et $P_A(F) = 0,8$.

Exercice 2

5 points

On est en situation d'équiprobabilité sur les 99 adhérents.

1) Le club compte 55 femmes et 63 amateurs :

$$P(F) = \frac{55}{99} = \boxed{\frac{5}{9}} \quad P(A) = \frac{63}{99} = \boxed{\frac{7}{11}}.$$

2) « Homme » est l'évènement $\bar{F}$. On cherche $P(\bar{F} \cup A)$:

$$P(\bar{F} \cup A) = P(\bar{F}) + P(A) - P(\bar{F} \cap A) = \frac{44}{99} + \frac{63}{99} - \frac{28}{99} = \boxed{\frac{79}{99}}.$$

Vérification : les adhérents qui ne sont ni homme ni amateur sont les 20 femmes professionnelles, et $99 - 20 = 79$.

3) « Professionnel » est l'évènement $\bar{A}$. Parmi les 36 professionnels, 20 sont des femmes :

$$P_{\bar{A}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{20/99}{36/99} = \frac{20}{36} = \boxed{\frac{5}{9}}.$$

4) D'une part, $P(F \cap A) = \frac{35}{99}$. D'autre part :

$$P(F) \times P(A) = \frac{5}{9} \times \frac{7}{11} = \frac{35}{99}.$$

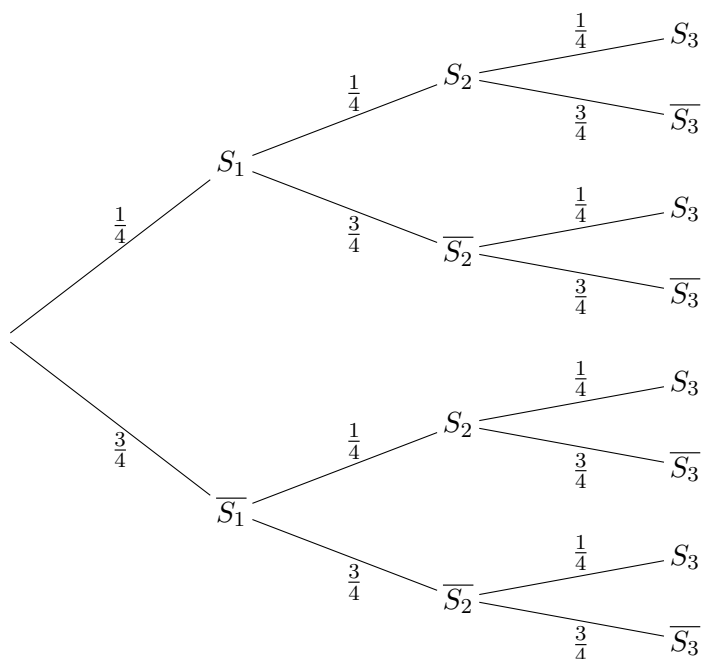
Comme $P(F \cap A) = P(F) \times P(A)$, les évènements F et A sont indépendants.

Cohérence : à la question 3), $P_{\bar{A}}(F) = \frac{5}{9} = P(F)$: être professionnel ne change pas la probabilité d'être une femme.

Exercice 3

6 points

- 1) Le dé est équilibré à 4 faces, donc pour chaque lancer $P(S_k) = \frac{1}{4}$ et $P(\overline{S_k}) = \frac{3}{4}$. Les lancers étant indépendants, ces probabilités sont les mêmes sur toutes les branches.



- 2) On cherche $P(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$. Les lancers sont indépendants (chemin du haut de l'arbre) :

$$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{64}}.$$

- 3) « Obtenir au moins un résultat différent de 1 » est l'évènement contraire de « obtenir trois fois le résultat 1 » :

$$P = 1 - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = 1 - \frac{1}{64} = \boxed{\frac{63}{64}}.$$

- 4) On cherche $P(S_3)$. Par la formule des probabilités totales, on additionne les probabilités des quatre chemins qui se terminent par S_3 :

$$P(S_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1+3+3+9}{64} = \frac{16}{64} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Remarque : on retrouve directement ce résultat : le troisième lancer est indépendant des deux premiers et le dé est équilibré.

- 5) Avec n lancers indépendants, la probabilité de n'obtenir que des 1 est $p_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$. On cherche le plus petit entier n tel que

$$\frac{1}{4^n} < 0,001 \iff 4^n > 1\,000.$$

À la calculatrice (table de valeurs de 4^n) :

$$4^4 = 256 < 1\,000 \quad \text{et} \quad 4^5 = 1\,024 > 1\,000,$$

soit $p_4 = \frac{1}{256} \approx 0,0039$ et $p_5 = \frac{1}{1\,024} \approx 0,00098$. Comme $n \mapsto 4^n$ est croissante, la condition est vraie pour tout $n \geq 5$ et fausse pour $n \leq 4$.

Johan doit effectuer au minimum 5 lancers.

Exercice 4

3 points

Soit $m \neq 0$ et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = mx^2$: $\mathcal{P}_m$ est sa courbe représentative. La fonction f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_m(x) = 2mx$.

Tangente en un point. La tangente à $\mathcal{P}_m$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'_m(a)(x - a) + f_m(a) = 2ma(x - a) + ma^2, \quad \text{soit} \quad y = 2max - ma^2.$$

Identification. (T) est tangente à $\mathcal{P}_m$ si et seulement s'il existe un réel a tel que cette tangente soit la droite $y = 2x + 1$, c'est-à-dire (mêmes coefficient directeur et ordonnée à l'origine) :

$$\begin{cases} 2ma = 2 \\ -ma^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} ma = 1 \\ -ma \times a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} ma = 1 \\ -a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ m = -1 \end{cases}$$

(T) est tangente à $\mathcal{P}_m$ pour une seule valeur : $m = -1$.

Le point de contact est le point d'abscisse $a = -1$: $f_{-1}(-1) = -(-1)^2 = -1$, soit le point $(-1; -1)$.

Vérifications :

- le point $(-1; -1)$ est bien sur (T) : $2 \times (-1) + 1 = -1$; et $f'_{-1}(-1) = 2 \times (-1) \times (-1) = 2$, le coefficient directeur de (T) ;
- autre méthode : les points communs vérifient $mx^2 = 2x + 1$, soit $mx^2 - 2x - 1 = 0$. La droite est tangente lorsque cette équation a une unique solution (racine double) :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times m \times (-1) = 4 + 4m = 0 \iff m = -1.$$

On obtient alors $-x^2 - 2x - 1 = -(x + 1)^2 = 0$, de racine double $x = -1$.