

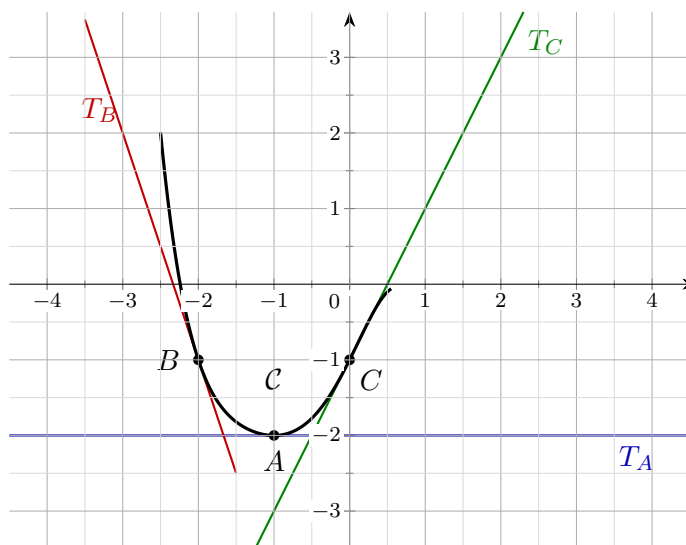
Exercice 1

3 points

Rappel : si f est dérivable en a , la tangente à C au point d'abscisse a est la droite qui passe par le point $(a; f(a))$ et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

- 1) On place $A(-1; -2)$, $B(-2; -1)$ et $C(0; -1)$ dans le repère (voir la figure ci-dessous).
- 2)
 - En A : $f'(-1) = 0$, la tangente T_A est **horizontale**. Elle a pour équation $y = -2$.
 - En B : $f'(-2) = -3$. On part de B et on avance de 1 vers la droite puis on descend de 3 : on obtient le point $(-1; -4)$ de T_B .
Équation : $y = -3(x - (-2)) + (-1)$, soit $T_B : y = -3x - 7$.
 - En C : $f'(0) = 2$. On part de C , on avance de 1 et on monte de 2 : on obtient le point $(1; 1)$.
Équation : $y = 2(x - 0) + (-1)$, soit $T_C : y = 2x - 1$.

Vérification : $-3 \times (-2) - 7 = -1$ et $2 \times 0 - 1 = -1$: $B \in T_B$ et $C \in T_C$.
- 3) La courbe doit passer par A , B et C en « épousant » chaque tangente : elle descend en B (pente -3), atteint un minimum en A (tangente horizontale) puis remonte en C (pente 2). Voici une courbe possible (il en existe une infinité).



Exercice 2

3 points

- 1) $f(1) = 1^2 = 1$, donc $A(1; 1) \in \mathcal{P}$. $g(1) = \sqrt{1} = 1$, donc $A(1; 1) \in \mathcal{R}$.

Le point $A(1; 1)$ est commun aux deux courbes.

- 2) La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

- Pour tout réel x , $f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$.
 $\mathcal{D} : y = 2(x - 1) + 1$, soit $\mathcal{D} : y = 2x - 1$.

- Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $g'(1) = \frac{1}{2}$.

$$\mathcal{D}' : y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1, \text{ soit } \boxed{\mathcal{D}' : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}.$$

Vérification : pour $x = 1$, $2 \times 1 - 1 = 1$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$: les deux droites passent bien par A .

Exercice 3

5 points

- 1) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en A , c'est-à-dire de la droite (AA') :

$$f'(1) = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{0 - 3}{2 - 1} = -3, \quad \boxed{f'(1) = -3}.$$

La tangente en B est la droite (BB') , qui passe par $B(2; 2)$ et $B'(0; 2)$: elle est horizontale, donc son coefficient directeur est nul :

$$\boxed{f'(2) = 0}.$$

- 2) On traduit les informations de l'énoncé :

- $A(1; 3) \in \mathcal{C}_f : f(1) = 3$, soit $a + b + c = 3$;
- $f'(1) = -3 : a - \frac{c}{1^2} = -3$, soit $a - c = -3$;
- $f'(2) = 0 : a - \frac{c}{2^2} = 0$, soit $a = \frac{c}{4}$.

On remplace a par $\frac{c}{4}$ dans la deuxième équation :

$$\frac{c}{4} - c = -3 \iff -\frac{3c}{4} = -3 \iff c = 4.$$

Donc $a = \frac{4}{4} = 1$, puis $b = 3 - a - c = 3 - 1 - 4 = -2$.

$$\boxed{a = 1, \quad b = -2, \quad c = 4} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) = x - 2 + \frac{4}{x}.$$

Vérification avec le point B , non utilisé : $f(2) = 2 - 2 + \frac{4}{2} = 2$, donc $B(2; 2) \in \mathcal{C}_f$. De plus $f'(1) = 1 - 4 = -3$ et $f'(2) = 1 - \frac{4}{4} = 0$.

Exercice 4

4 points

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

1) a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 12-4 \\ 3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 11-4 \\ -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8 \times 7 + 6 \times 1 = 56 + 6, \quad \boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 62}.$$

b. $\vec{CA} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{CB} \begin{pmatrix} 12-11 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-7) \times 1 + (-1) \times 5 = -7 - 5, \quad \boxed{\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -12}.$$

c. $\vec{BA} \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-8) \times (-1) + (-6) \times (-5) = 8 + 30, \quad \boxed{\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 38}.$$

- 2) Le triangle ABC est rectangle en A , en B ou en C si et seulement si l'un des trois produits scalaires précédents est nul (deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul).

Or $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 62 \neq 0$, $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -12 \neq 0$ et $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 38 \neq 0$: aucun des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ n'est droit.

Le triangle ABC n'est pas rectangle.

Vérification par les longueurs : $AB^2 = 100$, $AC^2 = 50$, $BC^2 = 26$, et $100 \neq 50 + 26$: la réciproque du théorème de Pythagore ne s'applique pas sur le plus grand côté $[AB]$.

Exercice 5

5 points

A. Sans coordonnées

- 1) I est le milieu de $[DE]$, donc $\vec{ID} + \vec{IE} = \vec{0}$. Avec la relation de Chasles :

$$\vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AI} + \vec{ID} + \vec{AI} + \vec{IE} = 2\vec{AI} + \underbrace{\vec{ID} + \vec{IE}}_{=\vec{0}},$$

donc $\boxed{\vec{AD} + \vec{AE} = 2\vec{AI}}$.

- 2) On développe par distributivité :

$$(\vec{AD} + \vec{AE}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AG}) = \vec{AD} \cdot \vec{BA} + \vec{AD} \cdot \vec{AG} + \vec{AE} \cdot \vec{BA} + \vec{AE} \cdot \vec{AG}.$$

On calcule chaque terme :

- $(AD) \perp (AB)$ car $ABCD$ est un carré, donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$;
- $(AE) \perp (AG)$ car $AEFG$ est un carré, donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$;
- D, A, G sont alignés et A est entre D et G : $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires de sens contraires, donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} = -AD \times AG = -ab$;
- B, A, E sont alignés et A est entre B et E : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires de même sens, donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BA} = AE \times BA = ba$.

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}) = 0 - ab + ab + 0, \quad \boxed{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}) = 0}.$$

3) D'après la question 1), $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$, et d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BG}$. La question 2) donne donc

$$2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \iff \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BG} = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BG}$ (non nuls) sont orthogonaux :

Les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

B. Avec coordonnées

Le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est orthonormé si l'on prend la longueur a du côté du carré $ABCD$ comme unité : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et de même longueur a . Dans cette unité, $AE = AG = \frac{b}{a}$.

- 1)
- A est l'origine : $A(0; 0)$; $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$, donc $B(1; 0)$; de même $D(0; 1)$.
 - E est sur la demi-droite opposée à $[AB)$, à la distance $\frac{b}{a}$ de A : $\overrightarrow{AE} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{AB}$, donc $E\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.
 - De même $\overrightarrow{AG} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{AD}$, donc $G\left(0; -\frac{b}{a}\right)$.
 - I est le milieu de $[DE]$: $x_I = \frac{0 + (-\frac{b}{a})}{2} = -\frac{b}{2a}$ et $y_I = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{A(0; 0), \quad I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1}{2}\right), \quad B(1; 0), \quad G\left(0; -\frac{b}{a}\right)}$$

2) On en déduit $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ -\frac{b}{a} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$. Le repère étant orthonormé :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BG} = \left(-\frac{b}{2a}\right) \times (-1) + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = 0.$$

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$: les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.