

Exercice 1

4 points

- 1) La forme canonique s'écrit $f_1(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Or $4(x + 3)^2 + 1 = 4(x - (-3))^2 + 1$, donc $\alpha = -3$ et $\beta = 1$.

Réponse a.

- 2) D'après le tableau, f_3 admet un maximum égal à 9, atteint en $x = -1$: le sommet de la parabole est le point $S(-1 ; 9)$ et la parabole est tournée vers le bas, donc $a < 0$ et

$$f_3(x) = a(x + 1)^2 + 9 \quad \text{avec } a < 0.$$

Cela élimine les propositions **a.** (sommet d'abscisse 9) et **c.** ($a = 4 > 0$). Il reste à départager **b.** et **d.** avec la valeur $f_3(-4) = -27$:

- proposition **b.** : $-3(-4 + 1)^2 + 9 = -3 \times 9 + 9 = -18 \neq -27$;
- proposition **d.** : $-4(-4 + 1)^2 + 9 = -4 \times 9 + 9 = -27 \checkmark$ et $-4(3 + 1)^2 + 9 = -64 + 9 = -55 \checkmark$.

Réponse d.

- 3) Pour $ax^2 + bx + c = 0$ ayant deux solutions, on a $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$. Ici $a = 2, b = -8, c = 6$:

$$S = -\frac{-8}{2} = 4 \quad \text{et} \quad P = \frac{6}{2} = 3.$$

Réponse b.

Vérification : $2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x - 1)(x - 3)$: les solutions sont 1 et 3, de somme 4 et de produit 3.

- 4) On étudie le signe de $-x^2 + 3x + 4$: $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 9 + 16 = 25 > 0$, d'où deux racines

$$x_1 = \frac{-3 - 5}{-2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + 5}{-2} = -1.$$

Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est strictement positif entre ses racines.

 Réponse d. : $S =] -1 ; 4[$
Exercice 2

6 points

- 1) Pour tout réel x , avec les identités remarquables :

$$\begin{aligned} g(x) &= (2x - 1)^2 - (x + 3)^2 \\ &= (4x^2 - 4x + 1) - (x^2 + 6x + 9) \\ &= 4x^2 - 4x + 1 - x^2 - 6x - 9 \\ &= 3x^2 - 10x - 8. \end{aligned}$$

$$g(x) = 3x^2 - 10x - 8$$

2) *Première méthode* : la forme A est une différence de deux carrés, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= [(2x - 1) - (x + 3)][(2x - 1) + (x + 3)] \\ &= (2x - 1 - x - 3)(2x - 1 + x + 3) \\ &= (x - 4)(3x + 2). \end{aligned}$$

Seconde méthode : on développe la forme C : $(3x + 2)(x - 4) = 3x^2 - 12x + 2x - 8 = 3x^2 - 10x - 8$, qui est bien la forme B.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (3x + 2)(x - 4)$

3) a. **Forme B** (avec $x = 0$, il ne reste que le terme constant) :

$$g(0) = 3 \times 0^2 - 10 \times 0 - 8 = \boxed{-8}.$$

b. **Forme A** (avec $x = -3$, la parenthèse $x + 3$ s'annule) :

$$g(-3) = (2 \times (-3) - 1)^2 - (-3 + 3)^2 = (-7)^2 - 0^2 = \boxed{49}.$$

Vérification avec la forme B : $3 \times 9 + 30 - 8 = 49$.

c. **Forme B** (le terme constant -8 disparaît et on peut factoriser par x) :

$$\begin{aligned} g(x) = -8 &\iff 3x^2 - 10x - 8 = -8 \\ &\iff 3x^2 - 10x = 0 \\ &\iff x(3x - 10) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 10 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

$S = \left\{ 0; \frac{10}{3} \right\}$

d. **Forme C** (produit nul) :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff (3x + 2)(x - 4) = 0 \\ &\iff 3x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0 \\ &\iff x = -\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = 4. \end{aligned}$$

$S = \left\{ -\frac{2}{3}; 4 \right\}$

Exercice 3

8 points

- 1) a. On divise par $-3 \neq 0$: $-3x^2 - 3x + 6 = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$, donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

$$S = \{-2; 1\}$$

Remarque : 1 est racine évidente ($-3 - 3 + 6 = 0$) et le produit des racines vaut $\frac{6}{-3} = -2$, d'où l'autre racine -2 .

- b. Pas besoin du discriminant :

$$-2x^2 + 5 = 0 \iff x^2 = \frac{5}{2} \iff x = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Or $\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

$$S = \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$$

- c. On factorise par x :

$$5x^2 - 3x = 0 \iff x(5x - 3) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{5}.$$

$$S = \left\{ 0; \frac{3}{5} \right\}$$

- 2) a. D'après la question 1)a., $f(x) = -3x^2 - 3x + 6$ a pour racines -2 et 1 ; son coefficient $a = -3$ est négatif, donc $f(x)$ est du signe de a (négatif) à l'extérieur des racines et positif entre elles.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$f(x) > 0 \text{ sur }]-2; 1[; f(x) < 0 \text{ sur }]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[; f(-2) = f(1) = 0$$

- b.** $g(x) = (-2x + 1) \times f(x)$. Le facteur affine $-2x + 1$ s'annule en $x = \frac{1}{2}$ et, son coefficient directeur -2 étant négatif, il est positif avant $\frac{1}{2}$ et négatif après. On réutilise le signe de $f(x)$ (inutile de refaire le calcul) dans un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
$-2x + 1$	$+$	$+$	0	$-$	$-$		
$-3x^2 - 3x + 6$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$g(x) > 0 \text{ sur }]-2; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[; g(x) < 0 \text{ sur }]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{2}; 1[$$

et $g(x) = 0$ pour $x \in \left\{-2; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

- c. Valeurs interdites :** le dénominateur est $f(x)$, nul en -2 et en 1 ; h est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Numérateur : pour $x^2 + x + 2$, $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$: le trinôme ne s'annule pas et garde le signe de $a = 1 > 0$. Donc $x^2 + x + 2 > 0$ pour tout réel x .

Le signe de $h(x)$ est donc celui de son dénominateur $f(x)$:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$x^2 + x + 2$	+	+	+	+	
$-3x^2 - 3x + 6$	-	0	+	0	-
$h(x)$	-	+	-	-	

$$h(x) > 0 \text{ sur }]-2; 1[; h(x) < 0 \text{ sur }]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$$

(h ne s'annule jamais et n'est pas définie en -2 et en 1).

- 3)** D'après le tableau de signes de g (question 2)b.), $g(x) \geq 0$ lorsque $g(x) > 0$ ou $g(x) = 0$:

$$S = \left[-2; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[$$

Vérification : $g(0) = 1 \times 6 = 6 \geq 0$ et $0 \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]$; $g(-3) = 7 \times (-12) = -84 < 0$ et $-3 \notin S$.

Exercice 4

2 points

- 1) Notons p le prix de vente d'une tonne, en euros. La recette pour q tonnes est $R(q) = pq$. L'activité est à l'équilibre pour 25 tonnes : la recette est alors égale au coût, $R(25) = C(25)$.

$$C(25) = 25^2 + 632 \times 25 + 1\,075 = 625 + 15\,800 + 1\,075 = 17\,500.$$

$$\text{Donc } 25p = 17\,500, \text{ soit } p = \frac{17\,500}{25} = 700.$$

Le prix de vente est de 700 euros la tonne.

- 2) Le bénéfice est la recette moins le coût : pour tout $q \in [0 ; 60]$,

$$B(q) = 700q - (q^2 + 632q + 1\,075) = 700q - q^2 - 632q - 1\,075.$$

$$B(q) = -q^2 + 68q - 1\,075$$

Vérification : $B(25) = -625 + 1\,700 - 1\,075 = 0$: on retrouve bien l'équilibre pour 25 tonnes.

- 3) On cherche s'il existe $q \in [0 ; 60]$ tel que $B(q) = 100$:

$$B(q) = 100 \iff -q^2 + 68q - 1\,075 = 100 \iff -q^2 + 68q - 1\,175 = 0.$$

$\Delta = 68^2 - 4 \times (-1) \times (-1\,175) = 4\,624 - 4\,700 = -76 < 0$: l'équation n'a aucune solution réelle.

Non : l'entreprise ne peut pas réaliser un bénéfice de 100 euros.

Autre méthode : sous forme canonique, $B(q) = -(q-34)^2 + 81$ (en effet $-(q^2 - 68q + 1\,156) + 81 = -q^2 + 68q - 1\,075$). Comme $-(q-34)^2 \leq 0$, on a $B(q) \leq 81$ pour tout q : le bénéfice maximal est de 81 euros, atteint pour 34 tonnes, et il est inférieur à 100 euros.