

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

6 points

Partie A. $f(x) = 0,5(x - 2)^2 - 8$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) On développe les deux expressions :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,5(x^2 - 4x + 4) - 8 = 0,5x^2 - 2x + 2 - 8 = 0,5x^2 - 2x - 6, \\ 0,5(x + 10)(x - 6) &= 0,5(x^2 - 6x + 10x - 60) = 0,5x^2 + 2x - 30. \end{aligned}$$

Les coefficients de x (-2 et 2) sont différents : les deux expressions ne sont pas égales pour tout réel x .

Contre-exemple : $f(0) = -6$ alors que $0,5 \times 10 \times (-6) = -30$.

Remarque : la bonne factorisation est $f(x) = 0,5(x + 2)(x - 6)$, car $f(x) = 0,5[(x - 2)^2 - 16] = 0,5(x - 2 - 4)(x - 2 + 4)$.

Affirmation 1 : FAUSSE

2) La parabole coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0, d'ordonnée $f(0)$:

$$f(0) = 0,5 \times (0 - 2)^2 - 8 = 0,5 \times 4 - 8 = -6.$$

Le point d'intersection est $(0; -6)$, et non $A(0; -8)$ (le point $(2; -8)$ est le sommet de la parabole).

Affirmation 2 : FAUSSE

Partie B. $g(x) = \frac{1}{2x}$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

3) La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$, avec $g(1) = \frac{1}{2} = 0,5$ et $g'(1) = -0,5$:

$$y = -0,5(x - 1) + 0,5 = -0,5x + 0,5 + 0,5 = -0,5x + 1.$$

Son ordonnée à l'origine est 1, et non 0,5.

Affirmation 3 : FAUSSE

4) Pour $h > -3$ et $h \neq 0$, le nombre $3 + h$ appartient à $]0; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2(3+h)} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{h} \times \frac{3 - (3+h)}{6(3+h)} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{-h}{6(3+h)} = \frac{-1}{6(3+h)}. \end{aligned}$$

(On a réduit au même dénominateur $6(3+h)$, puis simplifié par $h \neq 0$.)

Affirmation 4 : VRAIE

5) D'après la question précédente, quand h tend vers 0, le taux d'accroissement $\frac{-1}{6(3+h)}$ tend vers

$$\frac{-1}{6 \times 3} = -\frac{1}{18}. \text{ Donc } g \text{ est dérivable en } 3 \text{ et } g'(3) = -\frac{1}{18}.$$

Affirmation 5 : VRAIE

Partie C.

6) Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} -3x^2 + 4x - 1 &= -x^2 - 8x + 12 \iff -3x^2 + 4x - 1 + x^2 + 8x - 12 = 0 \\ &\iff -2x^2 + 12x - 13 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Discriminant : } \Delta = 12^2 - 4 \times (-2) \times (-13) = 144 - 104 = 40 > 0.$$

L'équation a donc deux solutions, $x_1 = \frac{-12 + \sqrt{40}}{-4} = 3 - \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1,42$ et $x_2 = 3 + \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 4,58$: les paraboles ont deux points d'intersection.

Affirmation 6 : FAUSSE

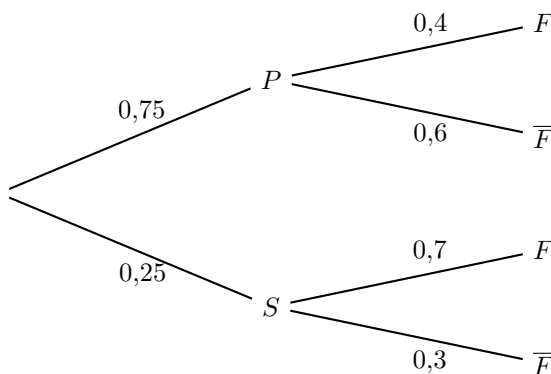
Exercice 2

4 points

1) Le choix se fait au hasard (équiprobabilité) parmi 200 livres, dont 150 romans policiers :

$$P(P) = \frac{150}{200} = \boxed{0,75}.$$

2) On a $P(S) = \frac{50}{200} = 0,25$ (ou $1 - 0,75$), $P_P(F) = 0,4$ et $P_S(F) = 0,7$, d'où l'arbre :



3) On cherche $P(P \cap F)$:

$$P(P \cap F) = P(P) \times P_P(F) = 0,75 \times 0,4 = \boxed{0,3}.$$

Vérification : 40 % de 150 romans, soit 60 romans, et $\frac{60}{200} = 0,3$.

- 4) P et S forment une partition de l'univers; d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(P \cap F) + P(S \cap F) = 0,3 + P(S) \times P_S(F) \\ &= 0,3 + 0,25 \times 0,7 = 0,3 + 0,175 = \boxed{0,475}. \end{aligned}$$

Vérification : $60 + 35 = 95$ livres d'auteurs français, et $\frac{95}{200} = 0,475$.

- 5) On cherche $P_F(P)$:

$$P_F(P) = \frac{P(P \cap F)}{P(F)} = \frac{0,3}{0,475} = \frac{300}{475} = \boxed{\frac{12}{19} \approx 0,632}.$$

Exercice 3

4 points

- 1) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 7(n+1)^2 - 2(n+1) + 3 - (7n^2 - 2n + 3) \\ &= 7n^2 + 14n + 7 - 2n - 2 + 3 - 7n^2 + 2n - 3 \\ &= 14n + 5. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 0$, $14n + 5 \geq 5 > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est (strictement) croissante.

- b. $u_n \geq 360 \iff 7n^2 - 2n + 3 \geq 360 \iff 7n^2 - 2n - 357 \geq 0$.

Discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 7 \times (-357) = 4 + 9996 = 10000 = 100^2$.

Racines : $n_1 = \frac{2-100}{14} = -7$ et $n_2 = \frac{2+100}{14} = \frac{51}{7} \approx 7,29$.

Le trinôme ($a = 7 > 0$) est positif à l'extérieur des racines. Pour $n \geq 0$, on a donc $u_n \geq 360 \iff n \geq \frac{51}{7}$, et le plus petit entier qui convient est :

$$\boxed{n = 8}$$

Vérification : $u_7 = 7 \times 49 - 14 + 3 = 332 < 360$ et $u_8 = 7 \times 64 - 16 + 3 = 435 \geq 360$.

- 2) a. Tableau de valeurs (mode suites de la calculatrice) :

n	0	1	2	3	4	5	6	10
v_n	1	1,5	1,75	1,875	1,9375	1,96875	1,984375	$\approx 1,99902$

Conjecture : **la suite (v_n) est croissante et converge vers 2.**

b. Tant que $v < 1,999$, on calcule le terme suivant et on augmente n de 1 :

```

1 def seuil():
2     n = 0
3     v = 1
4     while v < 1.999:
5         v = v/2 + 1
6         n = n + 1
7     return n

```

Le programme exécuté renvoie $p = 10$.

Vérification : $v_9 = \frac{1023}{512} \approx 1,99805 < 1,999$ et $v_{10} = \frac{2047}{1024} \approx 1,99902 \geq 1,999$.

Exercice 4

3 points

1) $f(15) = -30 \times 15^2 + 1200 \times 15 + 4000 = -6\,750 + 18\,000 + 4\,000 = 15\,250$.

15 250 personnes sont touchées au bout de 15 jours.

2) a. f est une fonction polynôme du second degré avec $a = -30 < 0$: elle est d'abord croissante puis décroissante, et son extremum (un maximum) est atteint en

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1200}{2 \times (-30)} = 20, \quad f(20) = -30 \times 400 + 24\,000 + 4\,000 = 16\,000.$$

Autre méthode : $f'(t) = -60t + 1200$, qui est positive sur $[0; 20]$ et négative sur $[20; +\infty[$.

t	0	20	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	4 000	16 000	

f est croissante sur $[0; 20]$ et décroissante sur $[20; +\infty[$.

b. Le nombre de malades est maximal pour $t = 20$:

le pic est atteint au bout de 20 jours, avec 16 000 malades.

3) a. 10 % de la population représente $0,1 \times 130\,000 = 13\,000$ personnes. Les crèches sont fermées lorsque $f(t) \geq 13\,000$:

$$\begin{aligned}
 f(t) \geq 13\,000 &\iff -30t^2 + 1200t + 4000 - 13\,000 \geq 0 \\
 &\iff -30t^2 + 1200t - 9\,000 \geq 0 \\
 &\iff t^2 - 40t + 300 \leq 0 \quad (\text{on divise par } -30 < 0 : \text{le sens change}).
 \end{aligned}$$

Le problème revient bien à résoudre $t^2 - 40t + 300 \leq 0$.

b. Discriminant : $\Delta = (-40)^2 - 4 \times 1 \times 300 = 1\,600 - 1\,200 = 400 = 20^2$.

Racines : $t_1 = \frac{40 - 20}{2} = 10$ et $t_2 = \frac{40 + 20}{2} = 30$.

Le trinôme ($a = 1 > 0$) est négatif ou nul entre ses racines :

t	0	10	30	$+\infty$	
$t^2 - 40t + 300$	+	0	-	0	+

Vérification : $f(10) = -3\,000 + 12\,000 + 4\,000 = 13\,000$ et

$f(30) = -27\,000 + 36\,000 + 4\,000 = 13\,000$.

L'ensemble des solutions est $[10; 30]$: les crèches ferment au bout de 10 jours et rouvrent au bout de 30 jours.

Les crèches sont fermées pendant $30 - 10 = 20$ jours.

Exercice 5

3 points

1) La tangente (T) passe par $M(-1; 2)$ et coupe l'axe des ordonnées au point $(0; -3)$. Son ordonnée à l'origine est donc -3 et son coefficient directeur :

$$m = \frac{-3 - 2}{0 - (-1)} = -5. \quad (T) : y = -5x - 3$$

Vérification par le calcul : $f(-1) = 1 + 1 = 2$ et $f'(-1) = -3 - 2 = -5$, d'où :

$$y = -5(x + 1) + 2 = -5x - 3.$$

2) **a.** (D) a pour coefficient directeur -1 . Si (D) est la tangente en un point d'abscisse a , alors $f'(a) = -1$:

$$-3a^2 + 2a = -1 \iff -3a^2 + 2a + 1 = 0.$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-3) \times 1 = 16, \text{ d'où } a_1 = \frac{-2 + 4}{-6} = -\frac{1}{3} \text{ et } a_2 = \frac{-2 - 4}{-6} = 1.$$

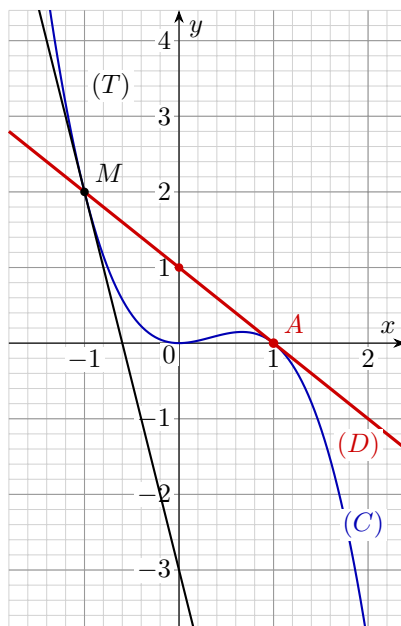
• En $a = 1$: $f(1) = -1 + 1 = 0$; la tangente a pour équation $y = -1 \times (x - 1) + 0 = -x + 1$: c'est (D).

• En $a = -\frac{1}{3}$: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$; la tangente a pour équation

$$y = -\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{27} = -x - \frac{5}{27} : \text{ce n'est pas } (D).$$

(D) est la tangente à (C) au point $A(1; 0)$.

b. Pour tracer (D), on utilise deux de ses points : $A(1; 0)$ et $(0; 1)$ (en rouge ci-dessous).



3) Pour tout réel x :

$$f(x) - (-x + 1) = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x - 1)^2(x + 1) \quad (\text{logiciel de calcul formel}).$$

Comme $(x - 1)^2 \geq 0$, le signe de cette différence est celui de $-(x + 1)$, sauf en $x = 1$ où elle s'annule :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-(x + 1)$	+	0	-	-
$(x - 1)^2$	+	+	0	+
$f(x) - (-x + 1)$	+	0	0	-

(C) est au-dessus de (D) sur $] -\infty ; -1]$ et au-dessous de (D) sur $[-1 ; +\infty[$.
Elles ont deux points communs : $M(-1 ; 2)$, où (C) traverse (D), et $A(1 ; 0)$, point de contact de la tangente.