

Calculatrice autorisée

### Exercice 1 : Vrai ou faux ?

6 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

**Partie A.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 0,5(x - 2)^2 - 8$ .

- 1) **Affirmation 1 :** pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0,5(x + 10)(x - 6)$ .
- 2) **Affirmation 2 :** la parabole représentative de la fonction  $f$  coupe l'axe des ordonnées au point  $A(0; -8)$ .

**Partie B.** Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{2x}$  et  $\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative.

- 3) **Affirmation 3 :** sachant que  $g'(1) = -0,5$ , la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1 a pour ordonnée à l'origine 0,5.
- 4) **Affirmation 4 :** pour tout réel  $h$  tel que  $h > -3$  et  $h \neq 0$ , le taux d'accroissement de  $g$  entre 3 et  $3 + h$  est égal à  $\frac{-1}{6(3 + h)}$ .
- 5) **Affirmation 5 :** le nombre dérivé de  $g$  en 3 est égal à  $-\frac{1}{18}$ .

**Partie C.** On considère les paraboles  $\mathcal{P}_1$  d'équation  $y = -3x^2 + 4x - 1$  et  $\mathcal{P}_2$  d'équation  $y = -x^2 - 8x + 12$ .

- 6) **Affirmation 6 :**  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  n'ont aucun point d'intersection.

### Exercice 2

4 points

La bibliothèque d'un lycée comporte 150 romans policiers et 50 romans de science-fiction. De plus, on sait que 40 % des romans policiers et 70 % des romans de science-fiction sont d'auteurs français. Jacques choisit au hasard un ouvrage parmi les 200 livres de la bibliothèque. On considère les événements  $P$  : « l'ouvrage est un roman policier »,  $S$  : « l'ouvrage est un roman de science-fiction » et  $F$  : « l'auteur de l'ouvrage est français ».

- 1) Calculer la probabilité qu'il choisisse un roman policier.
- 2) Représenter la situation par un arbre pondéré.
- 3) Calculer la probabilité qu'il choisisse un roman policier d'un auteur français.
- 4) Montrer que la probabilité qu'il choisisse un ouvrage d'un auteur français est 0,475.
- 5) Calculer la probabilité qu'il ait choisi un roman policier sachant que l'auteur est français.

### Exercice 3

4 points

Les deux questions sont indépendantes.

- 1) Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 7n^2 - 2n + 3$ .
  - a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - b. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n \geq 360$ .

2) Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + 1$ .

- À l'aide d'un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite  $(v_n)$ .
- Compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle renvoie le plus petit entier  $p$  tel que  $v_p \geq 1,999$ .  
Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
1 def seuil():
2     n = 0
3     v = 1
4     while v .....:
5         v = .....
6         n = n + 1
7     return n
```

### Exercice 4

3 points

On s'intéresse à la propagation d'une maladie dans une ville de 130 000 habitants. La fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(t) = -30t^2 + 1200t + 4000$$

modélise le nombre de personnes touchées par la maladie  $t$  jours après le début de l'épidémie.

- Déterminer le nombre de personnes touchées par la maladie 15 jours après le début de l'épidémie.
- Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$ .
  - En déduire au bout de combien de jours l'épidémie atteindra son pic.
- Le conseil municipal a décidé de fermer les crèches de la ville dès qu'au moins 10 % de la population est touchée par la maladie. On veut connaître le nombre de jours pendant lesquels les crèches seront fermées.
  - Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation  $t^2 - 40t + 300 \leq 0$ .
  - Répondre au problème posé.

### Exercice 5

3 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^3 + x^2$ .

Dans le repère ci-contre, on a tracé :

- la courbe  $(C)$  représentative de  $f$ ;
- la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point  $M$  d'abscisse  $-1$ .

- Lire graphiquement l'équation réduite de la tangente  $(T)$ .
- Soit  $(D)$  la droite d'équation  $y = -x + 1$ . On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout réel  $a$ ,  $f'(a) = -3a^2 + 2a$ .
  - Démontrer que  $(D)$  est la tangente à la courbe  $(C)$  en un point  $A$  dont on déterminera les coordonnées.
  - Tracer  $(D)$  dans le repère ci-contre.
- Un logiciel de calcul formel donne :

|   |                              |
|---|------------------------------|
| 1 | factoriser( $-x^3+x^2+x-1$ ) |
|   | $-(x-1)^2(x+1)$              |

Utiliser ce résultat pour étudier la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .

