

Exercice 1

7 points

- 1) On compte les tiges sur la figure : $t_1 = \boxed{4}$, $t_2 = \boxed{7}$, $t_3 = \boxed{10}$.

Pour passer d'une étape à la suivante, on ajoute un parallélogramme accolé à droite, ce qui demande 3 tiges de plus (la tige de gauche du nouveau parallélogramme existe déjà). Donc $t_4 = t_3 + 3 = \boxed{13}$.

- 2) D'après la construction, pour tout entier $n \geq 1$:

$$t_{n+1} = t_n + 3.$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre 3 :

(t_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $t_1 = 4$.

- 3) Le premier terme est t_1 (et non t_0). Pour tout entier $n \geq 1$:

$$t_n = t_1 + (n - 1)r = 4 + 3(n - 1), \quad \text{d'où} \quad \boxed{t_n = 3n + 1.}$$

Vérification : $t_1 = 3 + 1 = 4$, $t_2 = 7$, $t_3 = 10$, $t_4 = 13$.

- 4) a. On cherche l'entier $n \geq 1$ tel que $t_n = 625$:

$$\begin{aligned} 3n + 1 &= 625 &\iff 3n &= 624 &\text{ on retranche 1} \\ &&\iff n &= 208 &\text{ on divise par 3.} \end{aligned}$$

On utilise 625 tiges à l'étape $\boxed{208}$.

- b. On additionne les termes $t_1, t_2, \dots, t_{208}$ d'une suite arithmétique (208 termes) :

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \dots + t_{208} &= \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \\ &= 208 \times \frac{4 + 625}{2} = 104 \times 629. \end{aligned}$$

On aura utilisé 65 416 tiges au total.

- c. Bonus. À l'étape n , il y a $n + 1$ billes en bas et $n + 1$ billes en haut, soit $b_n = 2n + 2$ billes ($b_1 = 4$, $b_2 = 6$, $b_3 = 8$: on retrouve la figure). La suite (b_n) est arithmétique de raison 2, de premier terme $b_1 = 4$, et $b_{208} = 2 \times 208 + 2 = 418$. Donc :

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{208} = 208 \times \frac{4 + 418}{2} = 104 \times 422.$$

On aura utilisé 43 888 billes au total.

Remarque : à l'étape 208 seule, on utilise $b_{208} = 418$ billes.

Exercice 2

9 points

1) On applique la relation de récurrence avec $n = 0, 1$ puis 2 :

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 2 - 3 = \boxed{-2} \quad u_2 = \frac{1}{2} \times (-2) - 3 = \boxed{-4} \quad u_3 = \frac{1}{2} \times (-4) - 3 = \boxed{-5}.$$

2) On initialise u à $u_0 = 2$, puis on applique n fois la relation de récurrence :

```
1 def u(n):
2     u = 2
3     for i in range(n):
4         u = u/2 - 3
5     return u
```

Vérification : l'appel $u(3)$ renvoie -5.0 , c'est-à-dire $u_3 = -5$.

3) a. La cellule B3 doit contenir u_1 , calculé à partir de u_0 situé en B2 :

$$\boxed{=B2/2-3} \quad (\text{ou } =0,5*B2-3).$$

La référence à B2 est relative (sans \$) : en étirant vers le bas, B4 contient $=B3/2-3$, et ainsi de suite.

b. D'après le tableau, les termes diminuent : $2 > -2 > -4 > -5 > -5,5 > \dots$, et ils se rapprochent de -6 ($u_{30} \approx -5,999\,999\,993$).

Conjecture : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante et sa limite est } -6.}$

4) a. $v_0 = u_0 + 6 = 2 + 6 = \boxed{8}$.

b. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 3 \\ &= \frac{1}{2}(u_n + 6) \\ &= \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre $\frac{1}{2}$:

$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } v_0 = 8.}$

c. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{8}{2^n}}.$$

Comme $v_n = u_n + 6$, on a $u_n = v_n - 6$, d'où :

$$\boxed{u_n = \frac{8}{2^n} - 6.}$$

Vérification : $u_3 = \frac{8}{8} - 6 = -5$ et $u_{10} = \frac{8}{1024} - 6 = -5,992\,187\,5$, comme dans le tableur.

d. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{8}{2^{n+1}} - 6 - \left(\frac{8}{2^n} - 6 \right) \\ &= \frac{8}{2^{n+1}} - \frac{16}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{8}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Comme $2^{n+1} > 0$, on obtient $u_{n+1} - u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

La conjecture de la question **3)b.** est démontrée.

Autre méthode : (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]0; 1[$ et de premier terme $v_0 = 8 > 0$, donc elle est décroissante; $u_n = v_n - 6$ a donc le même sens de variation.

Exercice 3

4 points

- 1) On passe d'un terme au suivant en multipliant par $\frac{1}{2}$: S est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (w_k) de premier terme $w_0 = 16$ et de raison $q = \frac{1}{2}$, avec, pour tout entier naturel k :

$$w_k = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^4}{2^k} = 2^{4-k}.$$

Nombre de termes. Le dernier terme est $\frac{1}{262\,144} = \frac{1}{2^{18}} = 2^{-18}$. On cherche k tel que $2^{4-k} = 2^{-18}$, soit $4 - k = -18$, donc $k = 22$. La somme va de w_0 à w_{22} : elle compte **23 termes**.

Calcul. Avec la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$\begin{aligned} S &= \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = 16 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{23}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 32 \left(1 - \frac{1}{2^{23}}\right) = 32 - \frac{2^5}{2^{23}} = 32 - \frac{1}{2^{18}} = 32 - \frac{1}{262\,144}. \end{aligned}$$

$$S = \frac{8\,388\,607}{262\,144} \quad (S \approx 31,999\,996).$$

- 2) On part de $u = 16$ et $s = 16$ (premier terme déjà compté) ; à chaque passage dans la boucle, on calcule le terme suivant puis on l'ajoute. Il faut ajouter les 22 termes restants, donc 22 passages : n prend les valeurs $0, 1, \dots, 21$.

```

1 def somme() :
2     u = 16
3     s = 16
4     n = 0
5     while n < 22:
6         u = u/2
7         s = s + u
8         n = n + 1
9     return s

```

Vérification : l'appel `somme()` renvoie 31.999996185302734 , valeur égale à $32 - \frac{1}{262\,144}$.