

Exercice 1
4 points

- 1) La courbe de f est une parabole dont le sommet se lit sur le graphique : $S(2; 4)$.

Toute fonction polynôme du second degré s'écrit sous forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $(\alpha; \beta)$ sont les coordonnées du sommet de la parabole. Ici $\alpha = 2$ et $\beta = 4$, donc

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 4 \quad \text{avec } a \neq 0.$$

La courbe passe par le point de coordonnées $(0; -2)$, donc $f(0) = -2$:

$$a(0 - 2)^2 + 4 = -2 \iff 4a + 4 = -2 \iff 4a = -6 \iff a = -\frac{3}{2}.$$

$$\boxed{a = -\frac{3}{2}} \quad \text{d'où} \quad f(x) = -\frac{3}{2}(x - 2)^2 + 4.$$

Vérification : $a < 0$, ce qui est cohérent avec une parabole « tournée vers le bas » ; de plus

$$f(x) = 0 \iff (x - 2)^2 = \frac{8}{3} \iff x = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ ou } x = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

soit $x \approx 0,37$ ou $x \approx 3,63$, ce qui correspond aux points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

- 2) Soient u et v deux réels de $[2; +\infty[$ tels que $u < v$. On compare $f(u)$ et $f(v)$ en étudiant le signe de leur différence :

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= a(u - 2)^2 + 4 - (a(v - 2)^2 + 4) \\ &= a[(u - 2)^2 - (v - 2)^2] \\ &= a[(u - 2) - (v - 2)][(u - 2) + (v - 2)] \quad (\text{identité } A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)) \\ &= a(u - v)(u + v - 4). \end{aligned}$$

Étudions le signe de chaque facteur :

- $a < 0$ (ici $a = -\frac{3}{2}$);
- $u < v$, donc $u - v < 0$;
- $u \geq 2$ et $v > u \geq 2$, donc $u + v > 4$, c'est-à-dire $u + v - 4 > 0$.

Le produit de deux nombres négatifs et d'un nombre positif est positif : $f(u) - f(v) > 0$, donc $f(u) > f(v)$.

Ainsi, pour tous réels $u < v$ de $[2; +\infty[$, $f(u) > f(v)$: les images sont rangées dans l'ordre contraire.

$$\boxed{f \text{ est (strictement) décroissante sur } [2; +\infty[.}$$

Remarque : le raisonnement n'utilise que $a < 0$; il est valable pour toute valeur négative de a .

Exercice 2

7 points

1) a. Pour tout réel x , on développe :

$$2(x-3)(x-1) = 2(x^2 - x - 3x + 3) = 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 8x + 6 = f(x).$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = 2(x-3)(x-1).$$

b. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ($2 \neq 0$) :

$$f(x) = 0 \iff 2(x-3)(x-1) = 0 \iff x-3 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = 1.$$

$$\mathcal{S} = \{1; 3\}$$

c. $f(x)$ est un trinôme de coefficient $a = 2 > 0$ et de racines 1 et 3 : il est du signe de a (positif) à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	+

(Le facteur $2 > 0$ ne modifie pas le signe.)

$$f(x) > 0 \iff x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$$

2) a. On factorise par 2 puis on fait apparaître le début d'une identité remarquable :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 4x) + 6 \\ &= 2[(x-2)^2 - 4] + 6 \\ &= 2(x-2)^2 - 8 + 6 \\ &= 2(x-2)^2 - 2. \end{aligned}$$

$$f(x) = 2(x-2)^2 - 2$$

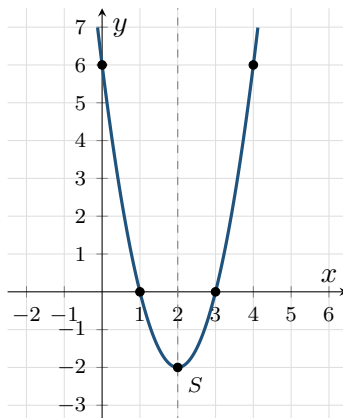
$$\text{Vérification : } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{4} = 2 \text{ et } \beta = f(2) = 8 - 16 + 6 = -2.$$

b. La forme canonique donne le sommet $S(2; -2)$ de la parabole. Comme $a = 2 > 0$, f est décroissante sur $]-\infty; 2]$, puis croissante sur $[2; +\infty[$, et admet un minimum égal à $f(2) = -2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		-2	

3) On s'appuie sur les résultats précédents :

- le sommet de la parabole est $S(2; -2)$ et l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 2$;
- la courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 3;
- elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0; 6)$ car $f(0) = 6$; par symétrie, $f(4) = 6$.



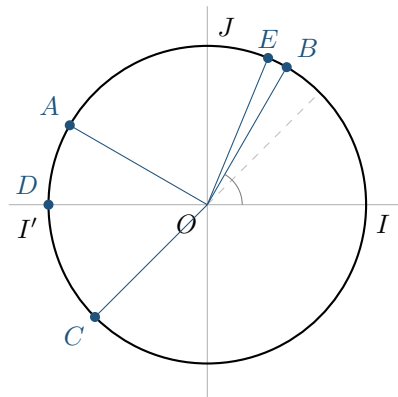
Exercice 3

9 points

Partie A

1) On repère chaque réel par l'angle correspondant :

- $A : \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ (soit 150°);
- $B : \frac{\pi}{3}$ (soit 60°);
- $C : -\frac{3\pi}{4}$ (soit -135°);
- $D : -\pi$, c'est le point $I'(-1; 0)$;
- $E : \frac{3\pi}{8}$ est le milieu de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$ (soit $67,5^\circ$) : on trace la bissectrice de l'angle formé par $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.



2) Les mesures en degrés et en radians sont proportionnelles : 180° correspond à π radians, donc x° correspond à $\frac{x\pi}{180}$ radians.

$$60^\circ = \frac{60\pi}{180} = \boxed{\frac{\pi}{3} \text{ rad}}$$

$$50^\circ = \frac{50\pi}{180} = \boxed{\frac{5\pi}{18} \text{ rad}}$$

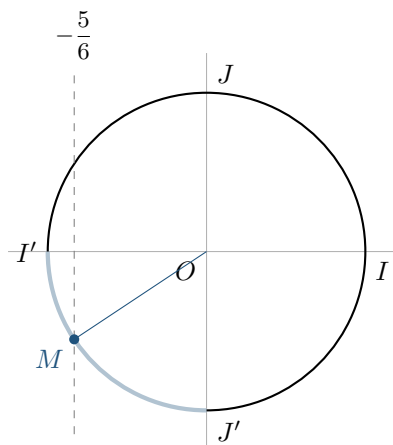
3) Inversement, y radians correspondent à $\frac{180y}{\pi}$ degrés.

$$\frac{7\pi}{6} \text{ rad} = \frac{7 \times 180}{6} = \boxed{210^\circ}$$

$$\frac{3\pi}{8} \text{ rad} = \frac{3 \times 180}{8} = \boxed{67,5^\circ}$$

Partie B

- 1) Le point M a pour abscisse $\cos x = -\frac{5}{6} \approx -0,83$: il est sur la droite verticale d'équation $X = -\frac{5}{6}$. Cette droite coupe le cercle en deux points. Comme $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, M est sur le quart de cercle allant de I' (associé à $-\pi$) à J' (associé à $-\frac{\pi}{2}$) : c'est le point situé sous l'axe des abscisses.



- 2) Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}, \quad \text{d'où} \quad \sin x = \frac{\sqrt{11}}{6} \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{11}}{6}.$$

Or $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$: M est sous l'axe des abscisses, donc $\sin x \leq 0$.

$$\boxed{\sin x = -\frac{\sqrt{11}}{6}}$$

Par les formules des angles associés :

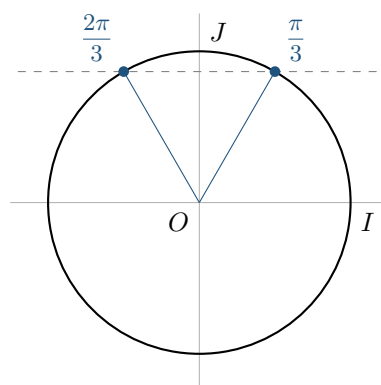
$$\sin(\pi - x) = \sin x = \boxed{-\frac{\sqrt{11}}{6}} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x = \boxed{\frac{\sqrt{11}}{6}}$$

$$\text{Vérification : } \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} + \frac{11}{36} = 1.$$

Partie C

- 1) On sait que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sur le cercle, la droite horizontale d'ordonnée $\frac{\sqrt{3}}{2}$ coupe le cercle en deux points, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, associés à $\frac{\pi}{3}$ et à $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Ces deux réels appartiennent à $] -\pi ; \pi]$ et ce sont les seuls de cet intervalle.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right\}$$



- 2) On sait que $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. La droite verticale d'abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ coupe le cercle en deux points, symétriques par rapport à l'axe des abscisses, associés à $\frac{3\pi}{4}$ et à $-\frac{3\pi}{4}$. Dans $\mathbb{R}$, chaque point du cercle est associé à une infinité de réels, qui diffèrent d'un multiple de 2π :

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

