

Exercice 1

5 points

Ici $f(x) = 3x^2 - 2$ et h est un réel non nul.

- 1) Par définition, le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ est

$$t(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

La proposition **b.** est fausse : $f'(1)$ est la *limite* de $t(h)$ quand h tend vers 0, pas $t(h)$ lui-même (on verra que $t(h) = 3h + 6 \neq 6 = f'(1)$ dès que $h \neq 0$). La proposition **c.** est fausse : le numérateur est une différence, pas une somme.

Réponse : a.

- 2) On calcule $f(1) = 3 \times 1^2 - 2 = 1$ et

$$f(1+h) = 3(1+h)^2 - 2 = 3(1+2h+h^2) - 2 = 3h^2 + 6h + 1.$$

Donc

$$t(h) = \frac{3h^2 + 6h + 1 - 1}{h} = \frac{h(3h + 6)}{h} = 3h + 6.$$

Réponse : c.

Vérification : pour $h = 1$, $\frac{f(2) - f(1)}{1} = 10 - 1 = 9$ et $3 \times 1 + 6 = 9$.

- 3) Quand h tend vers 0, $t(h) = 3h + 6$ tend vers 6, qui est un nombre réel : f est donc dérivable en 1 et $f'(1) = 6$.

Réponse : c.

- 4) La tangente au point d'abscisse -1 a pour équation $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$, avec $f'(-1) = -6$ et $f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 2 = 1$:

$$y = -6(x + 1) + 1 \iff y = -6x - 5.$$

On teste chaque proposition :

- **a.** le point de tangence a pour coordonnées $(-1; f(-1)) = (-1; 1)$: il est sur la tangente; *vrai*;
- **b.** pour $x = -2$: $-6 \times (-2) - 5 = 12 - 5 = 7$; *vrai*;
- **c.** l'ordonnée à l'origine de $y = -6x - 5$ est -5 ; *vrai*.

Réponses : a., b. et c.

- 5) La tangente au point d'abscisse 3 a pour équation $y = k'(3)(x - 3) + k(3)$; son coefficient directeur est $k'(3)$. Par identification avec $y = 3x - 5$: $k'(3) = 3$, donc **a.** est fausse et **c.** est vraie.

Le point de tangence $(3; k(3))$ est sur la tangente, donc $k(3) = 3 \times 3 - 5 = 4 \neq 5$: **b.** est fausse.

Réponse : c.

Exercice 2

6 points

Ici $g(x) = \frac{2}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- 1) Soit h un réel non nul, assez proche de 0 pour que $1+h \neq 2$ (c'est-à-dire $h \neq 1$). On a $g(1) = \frac{2}{1-2} = -2$ et $g(1+h) = \frac{2}{1+h-2} = \frac{2}{h-1}$.

Calcul du numérateur du taux de variation :

$$g(1+h) - g(1) = \frac{2}{h-1} + 2 = \frac{2+2(h-1)}{h-1} = \frac{2h}{h-1}.$$

Donc

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{2h}{h(h-1)} = \frac{2}{h-1}.$$

Quand h tend vers 0, $h-1$ tend vers -1 , donc $\frac{2}{h-1}$ tend vers $\frac{2}{-1} = -2$, qui est un nombre réel.

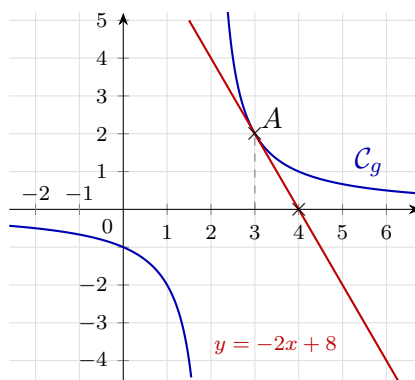
g est dérivable en 1 et $g'(1) = -2$.

Vérification : pour $h = 0,1$, $\frac{2}{0,1-1} = -\frac{2}{0,9} \approx -2,22$, proche de -2 .

- 2) $g(3) = \frac{2}{3-2} = 2$, donc $A(3; 2)$. La tangente en A a pour équation

$$y = g'(3)(x-3) + g(3) = -2(x-3) + 2 \iff y = -2x + 8.$$

Pour la tracer, on part de $A(3; 2)$ et on utilise le coefficient directeur -2 : quand x augmente de 1, y diminue de 2. La tangente passe donc aussi par le point $(4; 0)$ (et par $(2; 4)$).



- 3) On calcule $g(-1) = \frac{2}{-1-2} = -\frac{2}{3}$. La tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1)$$

$$y = -\frac{2}{9}(x+1) - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}x - \frac{2}{9} - \frac{6}{9}, \quad \text{soit} \quad y = -\frac{2}{9}x - \frac{8}{9}$$

Vérification : pour $x = -1$, $-\frac{2}{9} \times (-1) - \frac{8}{9} = \frac{2}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3} = g(-1)$.

Exercice 3

9 points

Ici $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

1) Lectures graphiques :

- le point de tangence donne a (abscisse) et $f(a)$ (ordonnée);
- $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente : on le lit avec deux points de la tangente, $f'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

T_1 passe par $A(1; -2)$ et $B(0; -1)$: coefficient $\frac{-2 - (-1)}{1 - 0} = -1$. T_2 est horizontale : coefficient 0. T_3 passe par $C(2; -1)$ et par $(3; 3)$: coefficient $\frac{3 - (-1)}{3 - 2} = 4$.

Point	A	B	C
Valeur de a	1	0	2
Valeur de $f(a)$	-2	-1	-1
Valeur de $f'(a)$	-1	0	4

Vérification par le calcul : $f(1) = 1 - 2 - 1 = -2$, $f(0) = -1$, $f(2) = 8 - 8 - 1 = -1$.

- 2) T_1 a pour coefficient directeur -1 et coupe l'axe des ordonnées en $B(0; -1)$: son ordonnée à l'origine est -1 .

$$T_1 : y = -x - 1$$

T_2 est la droite horizontale passant par $B(0; -1)$.

$$T_2 : y = -1$$

- 3) f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \times 2x = 3x^2 - 4x.$$

On calcule $f(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 - 1 = 8 - 8 - 1 = -1$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 = 12 - 8 = 4$.

L'équation de T_3 est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$:

$$y = 4(x - 2) - 1 = 4x - 8 - 1, \quad \text{soit} \quad T_3 : y = 4x - 9.$$

Vérification : pour $x = 2$, on a bien $4 \times 2 - 9 = -1 = f(2)$; le coefficient 4 est celui lu à la question 1). Le calcul confirme aussi les autres lectures : $f'(1) = 3 - 4 = -1$ et $f'(0) = 0$.