

Exercice 1

6 points

- 1) Nombre d'élèves utilisant un tableau : $\frac{3}{4} \times 32 = 24$. Parmi eux, $12,5\% \times 24 = 0,125 \times 24 = 3$ font une erreur, donc $24 - 3 = 21$ n'en font pas.

Les autres, soit $32 - 24 = 8$ élèves, font un schéma : 1 fait une erreur et 7 n'en font pas.

	Tableau	Schéma	Total
Avec erreur	3	1	4
Sans erreur	21	7	28
Total	24	8	32

- 2) Il y a équiprobabilité : chacun des 32 élèves a la même probabilité $\frac{1}{32}$ d'être choisi.

a. Un élève qui n'a pas utilisé de tableau a fait un schéma :

$$\overline{T} : \text{« l'élève a utilisé un schéma »}$$

b. $T \cap E$: « l'élève a utilisé un tableau et a fait une erreur » ; il y a 3 tels élèves :

$$P(T \cap E) = \frac{3}{32}.$$

D'après le tableau, $P(T) = \frac{24}{32}$ et $P(E) = \frac{4}{32}$, d'où :

$$P(T \cup E) = P(T) + P(E) - P(T \cap E) = \frac{24}{32} + \frac{4}{32} - \frac{3}{32} = \frac{25}{32}.$$

Vérification : $T \cup E$ regroupe les 24 élèves au tableau et le seul élève au schéma qui s'est trompé : $24 + 1 = 25$ élèves.

- 3) On cherche $P_E(T)$:

$$P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{4}{32}} = \frac{3}{4}.$$

(Parmi les 4 élèves qui se sont trompés, 3 ont utilisé un tableau.)

- 4) On compare $P(E) \times P(T)$ et $P(E \cap T)$:

$$P(E) \times P(T) = \frac{4}{32} \times \frac{24}{32} = \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32} = P(E \cap T).$$

Les événements E et T sont indépendants.

Autre justification : $P_E(T) = \frac{3}{4} = \frac{24}{32} = P(T)$: savoir que l'élève s'est trompé ne change pas la probabilité qu'il ait utilisé un tableau.

Exercice 2

4 points

On lit sur l'arbre $P(A) = 0,2$, $P(\bar{A}) = 0,8$, $P_A(B) = 0,6$, $P_A(\bar{B}) = 0,4$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,1$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,9$. On multiplie les probabilités le long de chaque chemin :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 0,2 \times 0,6 = 0,12, & P(A \cap \bar{B}) &= 0,2 \times 0,4 = 0,08, \\ P(\bar{A} \cap B) &= 0,8 \times 0,1 = 0,08, & P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 0,8 \times 0,9 = 0,72. \end{aligned}$$

Les totaux s'obtiennent en additionnant les lignes et les colonnes :

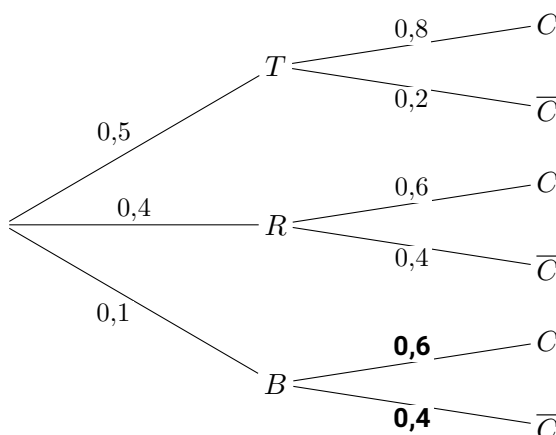
	A	$\bar{A}$	Total
B	0,12	0,08	0,2
$\bar{B}$	0,08	0,72	0,8
Total	0,2	0,8	1

Vérification : $0,12 + 0,08 + 0,08 + 0,72 = 1$, et la colonne A redonne bien $P(A) = 0,2$.

Exercice 3

5 points

1) $P(B) = 1 - 0,5 - 0,4 = 0,1$. Arbre pondéré, complété avec les résultats de la question 3 :



(Les deux branches en gras issues de B sont obtenues à la question 3.b.)

2) La probabilité cherchée est $P(T \cap C)$:

$$P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C) = 0,5 \times 0,8 = \boxed{0,4}.$$

3) On sait que $P(C) = 0,7$.

a. T , R et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(T \cap C) + P(R \cap C) + P(B \cap C).$$

Or $P(R \cap C) = P(R) \times P_R(C) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$, donc :

$$P(B \cap C) = P(C) - P(T \cap C) - P(R \cap C) = 0,7 - 0,4 - 0,24 = \boxed{0,06}.$$

b. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{0,06}{0,1} = \boxed{0,6},$$

puis $P_B(\overline{C}) = 1 - 0,6 = 0,4$: ce sont les deux branches en gras de l'arbre.

Vérification : $0,5 \times 0,8 + 0,4 \times 0,6 + 0,1 \times 0,6 = 0,4 + 0,24 + 0,06 = 0,7$.

Exercice 4

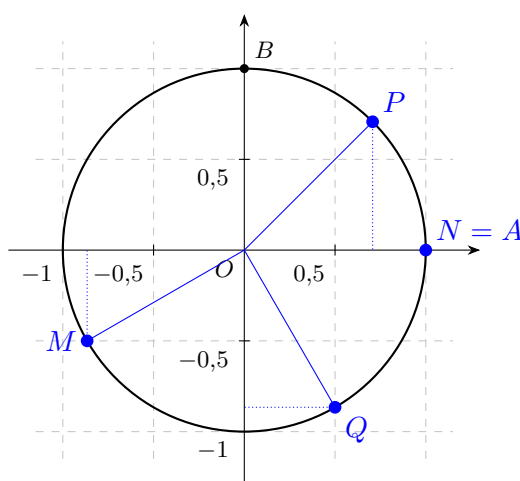
5 points

1) Les mesures en degrés et en radians sont proportionnelles : π rad correspond à 180° .

$$\frac{\pi}{10} \text{ rad} = \frac{180}{10}^\circ = \boxed{18^\circ} \quad 110^\circ = 110 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \boxed{\frac{11\pi}{18} \text{ rad} \approx 1,9 \text{ rad}}.$$

2) On se ramène à un réel de $]-\pi; \pi]$ en retirant ou en ajoutant un multiple de 2π (un tour complet) :

- $-\frac{5\pi}{6}$ est déjà dans $]-\pi; \pi]$: $M \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} \right)$;
- $2020\pi = 0 + 1010 \times 2\pi$, donc N est associé à 0 : $N = A(1; 0)$;
- $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$, donc P est associé à $\frac{\pi}{4}$: $P \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$;
- $-\frac{13\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - 2 \times 2\pi$, donc Q est associé à $-\frac{\pi}{3}$: $Q \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.



Construction : M est sur la droite d'équation $y = -0,5$ (côté gauche), Q sur la droite d'équation $x = 0,5$ (en bas), P sur la bissectrice du premier quart de plan.

3) Pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc :

$$\cos^2(x) = 1 - \left(-\frac{1}{5} \right)^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}.$$

Sans information sur l'intervalle auquel appartient x , deux valeurs sont possibles :

$$\cos(x) = \frac{2\sqrt{6}}{5} \approx 0,98 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \approx -0,98$$

$$\text{car } \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{\sqrt{4 \times 6}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\text{Vérification : } \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} + \frac{1}{25} = 1.$$