

Exercice 1

4 points

- 1) a. (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = 2$ et une relation qui donne u_{n+1} à partir de u_n (et de n) : c'est une relation de récurrence.
- b. v_n se calcule directement à partir de n : (v_n) est définie par une formule explicite.
- c. (w_n) est définie par $w_0 = 2$ et une relation qui donne w_{n+1} à partir de w_n : c'est une relation de récurrence.

2) Pour (u_n) , on applique la relation avec $n = 0$, puis $n = 1$:

$$u_0 = 2, \quad u_1 = (0 + 2) u_0^2 = 2 \times 2^2 = 8, \quad u_2 = (1 + 2) u_1^2 = 3 \times 8^2 = 192.$$

$u_0 = 2; u_1 = 8; u_2 = 192$

Pour (w_n) :

$$w_0 = 2, \quad w_1 = (1 - w_0)^2 = (1 - 2)^2 = 1, \quad w_2 = (1 - w_1)^2 = (1 - 1)^2 = 0.$$

$w_0 = 2; w_1 = 1; w_2 = 0$

3) On remplace n par $n + 1$ dans $v_n = -3n^2 + 5$:

$$v_{n+1} = -3(n + 1)^2 + 5 = -3(n^2 + 2n + 1) + 5 = \boxed{-3n^2 - 6n + 2}.$$

De même, pour $n \geq 1$, on remplace n par $n - 1$:

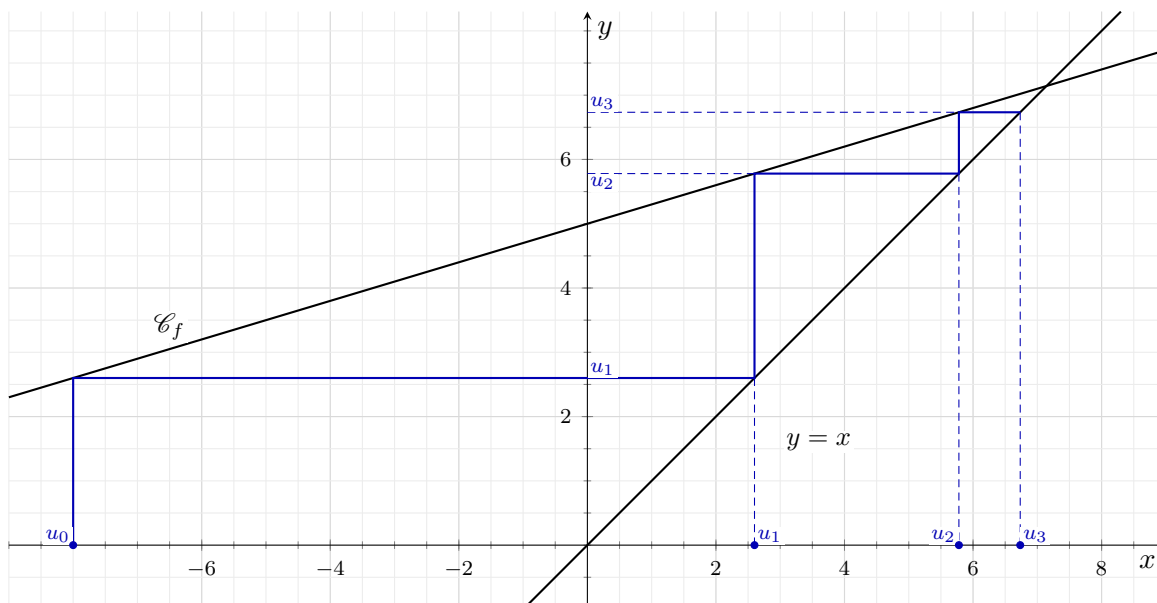
$$v_{n-1} = -3(n - 1)^2 + 5 = -3(n^2 - 2n + 1) + 5 = \boxed{-3n^2 + 6n + 2}.$$

Vérification avec $n = 1$: $v_2 = -3 \times 4 + 5 = -7$ et $-3 - 6 + 2 = -7$; $v_0 = 5$ et $-3 + 6 + 2 = 5$.

Exercice 2

5 points

- 1) On part de $u_0 = -8$ sur l'axe des abscisses. On monte verticalement jusqu'à $\mathcal{C}_f$: l'ordonnée obtenue est $f(u_0) = u_1$. On se déplace horizontalement jusqu'à la droite $y = x$: le point atteint a pour abscisse u_1 , que l'on reporte sur l'axe des abscisses. On recommence à partir de u_1 , puis de u_2 .



Vérification par le calcul :

$$u_1 = 0,3 \times (-8) + 5 = 2,6; \quad u_2 = 0,3 \times 2,6 + 5 = 5,78; \quad u_3 = 0,3 \times 5,78 + 5 = 6,734.$$

- 2) Sur la figure, les termes u_0, u_1, u_2, u_3 se déplacent vers la droite : on conjecture que la suite (u_n) est croissante.

Ils se rapprochent de plus en plus de l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $y = x$ (environ 7,1) : on conjecture que la suite (u_n) converge vers l'abscisse de ce point.

Bonus : l'abscisse ℓ du point d'intersection vérifie $f(\ell) = \ell$:

$$\begin{aligned} 0,3\ell + 5 &= \ell \iff 5 = 0,7\ell && \text{on retranche } 0,3\ell \\ \iff \ell &= \frac{5}{0,7} = \frac{50}{7} && \text{on divise par } 0,7 > 0 \end{aligned}$$

La limite conjecturée est $\ell = \frac{50}{7} \approx 7,14$. Vérification : $u_4 = 7,0202$ et $u_5 \approx 7,106$ s'en approchent.

Exercice 3

5 points

- 1) **Suite** (u_n) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^{n+2}}{5^n} > 0$ (quotient de nombres strictement positifs). On peut donc calculer le quotient de deux termes consécutifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+3}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3^{n+2}} = \frac{3^{n+3}}{3^{n+2}} \times \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{3}{5} < 1.$$

Comme $u_n > 0$, on multiplie par u_n sans changer le sens : $u_{n+1} < u_n$ pour tout n .

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Vérification : $u_0 = 9$, $u_1 = 5,4$, $u_2 = 3,24$.

Suite (v_n) . On a $v_n = g(n)$ avec $g(x) = -x^2 + x + 21$ sur $[0; +\infty[$. La fonction g est un polynôme du second degré de coefficient $a = -1 < 0$: elle est croissante puis décroissante, et son maximum est atteint en

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times (-1)} = \frac{1}{2}.$$

g est donc strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, donc sur $[1; +\infty[$: pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} = g(n+1) < g(n) = v_n$.

De plus $v_0 = 21$ et $v_1 = -1 + 1 + 21 = 21$, donc $v_1 = v_0$.

La suite (v_n) est décroissante (strictement à partir du rang 1).

Vérification : $v_{n+1} - v_n = -(n+1)^2 + (n+1) + 21 - (-n^2 + n + 21) = -2n \leq 0$; $v_0 = v_1 = 21$, $v_2 = 19$, $v_3 = 15$, $v_4 = 9$.

- 2) Pour tout n , $u_n > 0$. Avec le tableau de valeurs de la calculatrice (mode suite, ou $Y_1 = 3^{X+2}/5^X$) :

$$u_{17} \approx 1,52 \times 10^{-3} > 10^{-3} \quad \text{et} \quad u_{18} \approx 9,14 \times 10^{-4} \leq 10^{-3}.$$

La suite (u_n) étant décroissante, pour tout $n \geq 18$: $0 < u_n \leq u_{18} \leq 10^{-3}$. En revanche $u_{17} > 10^{-3}$, donc 17 ne convient pas.

$$n_0 = 18$$

Exercice 4

6 points

1) On remplace n par 0, 1, 2, 3 et 4 :

$$u_0 = 5 + \frac{3}{1} = \boxed{8}; \quad u_1 = 5 + \frac{3}{3} = \boxed{6}; \quad u_2 = 5 + \frac{3}{5} = \boxed{5,6};$$

$$u_3 = 5 + \frac{3}{7} = \boxed{\frac{38}{7} \approx 5,43}; \quad u_4 = 5 + \frac{3}{9} = \boxed{\frac{16}{3} \approx 5,33}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 5 + \frac{3}{2(n+1)+1} - 5 - \frac{3}{2n+1} = \frac{3}{2n+3} - \frac{3}{2n+1} \\ &= \frac{3(2n+1) - 3(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{6n+3-6n-9}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{-6}{(2n+1)(2n+3)}. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 0$, $2n+1 > 0$ et $2n+3 > 0$: le dénominateur est strictement positif et le numérateur vaut $-6 < 0$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Vérification : $8 > 6 > 5,6 > 5,43 > 5,33$.

3) Pour tout n , $u_n - 5 = \frac{3}{2n+1} > 0$, donc $|u_n - 5| = \frac{3}{2n+1}$. On résout :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2n+1} &\leq 10^{-3} \iff 3 \leq 10^{-3}(2n+1) && \text{on multiplie par } 2n+1 > 0 \\ &\iff 3000 \leq 2n+1 && \text{on multiplie par } 1000 > 0 \\ &\iff 2999 \leq 2n && \text{on retranche 1} \\ &\iff n \geq 1499,5 && \text{on divise par } 2 > 0 \end{aligned}$$

n étant un entier, le plus petit entier qui convient est

$$\boxed{n_0 = 1500.}$$

Vérification : $|u_{1499} - 5| = \frac{3}{2999} \approx 1,0003 \times 10^{-3} > 10^{-3}$ et $|u_{1500} - 5| = \frac{3}{3001} \approx 9,997 \times 10^{-4} \leq 10^{-3}$.

4) Les termes de la suite décroissent et s'approchent de 5 (l'écart $u_n - 5 = \frac{3}{2n+1}$ devient aussi petit que l'on veut : moins de 10^{-3} dès le rang 1500). On conjecture :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5.}$$

Bonus. Soit $\varepsilon > 0$ et l'intervalle ouvert $]5 - \varepsilon; 5 + \varepsilon[$ centré en 5. Comme $u_n > 5$ pour tout n , on a $u_n \in]5 - \varepsilon; 5 + \varepsilon[$ dès que $u_n - 5 < \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2n+1} < \varepsilon &\iff \frac{3}{\varepsilon} < 2n+1 && \text{on multiplie par } \frac{2n+1}{\varepsilon} > 0 \\ &\iff n > \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\varepsilon} - 1 \right) && \text{on retranche 1 puis on divise par 2} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, quel que soit $\varepsilon > 0$, tous les termes de la suite sont dans $]5 - \varepsilon; 5 + \varepsilon[$ à partir d'un certain rang (avec $\varepsilon = 10^{-3}$, on obtient $n > 1499,5$, soit le rang 1500 de la question 3). C'est la définition de la convergence vers 5 :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5.}$$