

Exercice 1

5 points

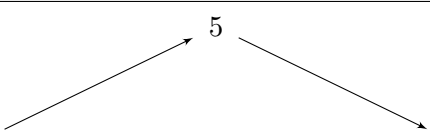
- 1) L'équation $y = 5(x + 4)^2 - 9$ est de la forme canonique $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = 5$, $\alpha = -4$ et $\beta = -9$ (car $x + 4 = x - (-4)$).

Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ et l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$:

$$\boxed{S(-4; -9)} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{axe de symétrie : } x = -4}.$$

Vérification : en développant, $y = 5x^2 + 40x + 71$, et $-\frac{b}{2a} = -\frac{40}{10} = -4$.

- 2) $f(x) = 5 - 3(x - 7)^2 = -3(x - 7)^2 + 5$ est la forme canonique de f , avec $a = -3$, $\alpha = 7$ et $\beta = 5$. Comme $a = -3 < 0$, la parabole est tournée vers le bas : f est croissante sur $] -\infty; 7]$, décroissante sur $[7; +\infty[$, et admet un maximum égal à $f(7) = 5$.

x	$-\infty$	7	$+\infty$
f			

Justification sans le cours : pour tout réel x , $(x - 7)^2 \geq 0$ donc $f(x) = 5 - 3(x - 7)^2 \leq 5 = f(7)$.

- 3) Le sommet de la parabole est $S(1; -2)$, donc la forme canonique de $f(x)$ s'écrit :

$$f(x) = a(x - 1)^2 - 2, \quad a \neq 0.$$

La parabole passe par $A(3; 4)$, donc $f(3) = 4$:

$$a(3 - 1)^2 - 2 = 4 \iff 4a = 6 \iff a = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2}(x - 1)^2 - 2}$$

Vérification : $f(1) = -2$ et $f(3) = \frac{3}{2} \times 4 - 2 = 4$.

Exercice 2

4 points

1) On étudie le signe de chaque facteur.

- $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$.
- Pour $-x^2 + x - 2$: $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1 - 8 = -7 < 0$. Ce trinôme n'a pas de racine et il est du signe de $a = -1$: il est strictement négatif pour tout réel x .

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x - 3$	$-$	0	$+$
$-x^2 + x - 2$	$-$	$-$	$-$
$(x - 3)(-x^2 + x - 2)$	$+$	0	$-$

Le produit est négatif ou nul pour $x \geq 3$:

$$\mathcal{S} = [3; +\infty[$$

Vérification : pour $x = 4$, $(4 - 3)(-16 + 4 - 2) = -14 \leq 0$; pour $x = 0$, $(-3) \times (-2) = 6 > 0$.

2) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x) > g(x)$, c'est-à-dire $f(x) - g(x) > 0$. Or :

$$f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 7 - (-x^2 + 3x - 1) = 2x^2 - x - 6.$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 7$, d'où deux racines :

$$x_1 = \frac{1 - 7}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + 7}{4} = 2.$$

Le trinôme est du signe de $a = 2 > 0$ à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$$\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g \text{ sur }]-\infty; -\frac{3}{2}[\text{ et sur }]2; +\infty[.$$

Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses $-\frac{3}{2}$ et 2 .

Exercice 3

4 points

1) Soit $x \in [0; 2]$. Les sommets du rectangle ont pour coordonnées :

$$P(-x; 0), \quad Q(x; 0), \quad M(x; 4 - x^2), \quad N(-x; 4 - x^2).$$

- Longueur : $PQ = x - (-x) = 2x$.
- Largeur : $QM = 4 - x^2$ (positive car $x^2 \leq 4$ sur $[0; 2]$).

Le périmètre vaut donc :

$$p(x) = 2 \times PQ + 2 \times QM = 2 \times 2x + 2(4 - x^2) = 4x + 8 - 2x^2.$$

$$p(x) = -2x^2 + 4x + 8$$

2) p est un polynôme du second degré avec $a = -2, b = 4, c = 8$. Son sommet a pour abscisse

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-4} = 1 \quad \text{et} \quad p(1) = -2 + 4 + 8 = 10.$$

Comme $a < 0$, p est croissante puis décroissante. On calcule aussi $p(0) = 8$ et $p(2) = -8 + 8 + 8 = 8$.

x	0	1	2
p	8	10	8

Autre écriture : $p(x) = -2(x - 1)^2 + 10$.

3) a. D'après le tableau, le maximum de p sur $[0; 2]$ est atteint en 1 : le périmètre est maximal pour $x = 1$.

b. Ce périmètre maximal vaut $p(1) = 10$ (unités de longueur).

Vérification : pour $x = 1$, le rectangle mesure $PQ = 2$ sur $QM = 4 - 1 = 3$, et $2 \times (2 + 3) = 10$.

Exercice 4

4 points

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 4(n+1) - (n^2 - 4n) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 - n^2 + 4n \\ &= 2n - 3. \end{aligned}$$

Or $2n - 3 \geq 0 \iff n \geq \frac{3}{2}$. Comme n est entier, $u_{n+1} - u_n > 0$ dès que $n \geq 2$.

La suite (u_n) est (strictement) croissante à partir du rang 2.

Vérification : $u_0 = 0, u_1 = -3, u_2 = -4, u_3 = -3, u_4 = 0, u_5 = 5$: la suite décroît jusqu'au rang 2, puis croît.

2) a. On remplace n par 0, 1, 2 et 3 :

$$w_0 = \frac{-3}{1} = \boxed{-3} \quad w_1 = \frac{-2}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}} \quad w_2 = \frac{-1}{5} = \boxed{-\frac{1}{5}} \quad w_3 = \frac{0}{7} = \boxed{0}.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on réduit au même dénominateur $2(2n+1)$:

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{2(2n+1)} = \frac{2n+1}{2(2n+1)} - \frac{7}{2(2n+1)} = \frac{2n-6}{2(2n+1)} = \frac{2(n-3)}{2(2n+1)} = \frac{n-3}{2n+1}.$$

$$w_n = \frac{1}{2} - \frac{7}{2(2n+1)}$$

Vérification : pour $n = 0$, $\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -3 = w_0$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $0 < 2n+1 < 2n+3$, donc, la fonction inverse étant décroissante sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{7}{2(2n+3)} < \frac{7}{2(2n+1)} \iff \frac{1}{2} - \frac{7}{2(2n+3)} > \frac{1}{2} - \frac{7}{2(2n+1)} \iff w_{n+1} > w_n.$$

La suite (w_n) est strictement croissante.

$$\text{Autre méthode : } w_{n+1} - w_n = \frac{7}{2(2n+1)} - \frac{7}{2(2n+3)} = \frac{7}{(2n+1)(2n+3)} > 0.$$

De plus, pour tout entier naturel n , on a $\frac{7}{2(2n+1)} > 0$, donc :

$$w_n = \frac{1}{2} - \frac{7}{2(2n+1)} < \frac{1}{2}, \quad \text{soit} \quad w_n < \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on utilise $2(2n+1) > 0$) :

$$\begin{aligned} w_n \geq 0,49 &\iff \frac{1}{2} - \frac{7}{2(2n+1)} \geq 0,49 \\ &\iff \frac{7}{2(2n+1)} \leq 0,01 && \text{on retranche } \frac{1}{2}, \text{ puis on multiplie par } -1 \\ &\iff 7 \leq 0,02(2n+1) && \text{on multiplie par } 2(2n+1) > 0 \\ &\iff 350 \leq 2n+1 && \text{on divise par } 0,02 > 0 \\ &\iff n \geq 174,5. \end{aligned}$$

Le plus petit entier qui convient est $n = 175$.

$$\text{Vérification : } w_{174} = \frac{171}{349} \approx 0,489\,97 < 0,49 \text{ et } w_{175} = \frac{172}{351} \approx 0,490\,03 \geq 0,49.$$

Exercice 5

3 points

- 1) La cellule B3 contient u_1 , calculé à partir de u_0 situé en B2; la cellule C3 contient v_1 , calculé à partir de $n = 1$ situé en A3 :

$$B3 : =0,4*B2+6$$

$$C3 : =5*A3+6$$

Après recopie vers le bas, on obtient par exemple $u_1 = 7,2$, $u_2 = 8,88$ et $v_1 = 11$, $v_2 = 16$.

- 2) À la calculatrice (mode suites, ou tableau de valeurs) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	3	7,2	8,88	9,552	9,8208	9,9283	9,9713	9,9885	9,9954

(valeurs arrondies à 10^{-4} à partir de $n = 5$.)

On conjecture que (u_n) est croissante et converge vers 10.

- 3) a. La boucle doit continuer tant que le seuil n'est pas atteint, c'est-à-dire tant que $u < 9,99$, et calculer à chaque tour le terme suivant :

```

1 def seuil():
2     n = 0
3     u = 3
4     while u < 9.99:
5         u = 0.4*u + 6
6         n = n + 1
7     return n

```

- b. D'après le tableau, $u_7 \approx 9,9885 < 9,99$ et $u_8 \approx 9,9954 \geq 9,99$. La fonction renvoie donc 8.

Vérification : le programme exécuté renvoie bien 8.